ФГБОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ОЛИМПИАДЫ
«ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2018-2019 УЧ. ГОД

Заключительный (очный) тур
9-10 классы

Вариант 1

Решение

Задание 1. Решим уравнение $x^2 - 6\,xy + 13\,y^2 - 100 = 0$ как квадратное относительно x. Получим: $x = 3y \pm 2\sqrt{25 - y^2}$. Так как y натуральное число, то возможные значения y будут числа 0,1,2,3,4,5. С другой стороны, x также натуральное число, следовательно при данном y выражение $25 - y^2$ должно быть полным квадратом. Отсюда находим, что подходят только числа y = 0, y = 3, y = 4, y = 5. Для этих значений y находим x. Получим ответ: (10,0), (1,3), (17, 3), (6, 4), (18, 4), (15,5).

Задание 2. Обозначим число оставшихся игроков через n. Тогда между собой они сыграли 45 партий. Поэтому имеем: $\frac{n\,(n-1)}{2} = 45$. Отсюда: $n^2 - n - 90 = 0$. Получим, что n = 10. Если прибавит выбывшего, то общее число участников равно 11. Ответ {11}.

Задание 3. Пусть ABC данный равнобедренный треугольник, где B – вершина прямого угла, катеты AB = BC = 1. Повернем данный треугольник вокруг вершины B на 45°, мы получим треугольник BA_1C_1, где катеты будут A_1B и B C_1 (постройте рисунок !). Пусть катет B C_1 пересекает гипотенузу AC в точке M, гипотенуза A_1 C_1 пересекает AC в точке N, а катет AB в точке P. Требуется найти площадь четырехугольника BPNM. Очевидно, что искомая площадь будет равна половине площади треугольника ABC за вычетом площади маленького равнобедренного прямоугольного треугольника APN, катет которого обозначим через y. Так как BM = MC = $\frac{1}{\sqrt{2}}$, то C_1M равно 1 - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и тогда NM = 1 - $\frac{1}{\sqrt{2}}$. А тогда AN = $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$. По теореме Пифагора $2y^2 = (\sqrt{2} - 1)^2$. Отсюда $2y^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, следовательно $\frac{y^2}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$. Значит искомая площадь равна $\frac{1}{4} - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Ответ: $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Задание 4. Обозначим $2009x^3 - 2008 = y$. Тогда получим систему $\begin{cases} 2009\,x^3 = y + 2008 \\ 2009\,y^3 = x + 2008 \end{cases}$ Вычитая из первого второе уравнение получим 2009 $(x^3 - y^3) = y - x$, или $2009\,(x - y)\,(x^2 + xy + y^2) = y - x$. Следовательно y = x, или $x^2 + xy + y^2 = -\frac{1}{2009}$. Последнее равенство невозможно так как $x^2 + xy + y^2 \geq 0$. Значит $y = x$. Поэтому имеем: $2009x^3 = x + 2008$, $2009x^3 - 2009 = x - 1$. $2009(x-1)(x^2+x+1) = x - 1 \Rightarrow x = 1$ или $x^2 + x + 1 = \frac{1}{2009}$. Это квадратное уравнение не имеет решений так как $D < 0$. Ответ: $x = 1$.

Задание 5. Обозначим $\sqrt{116+\sqrt{2007}} - \sqrt{116-\sqrt{2007}} = а$, а второе число через в $= \sqrt{6-\sqrt{27}} + \sqrt{6+\sqrt{27}}$. Ясно, что а, в > 0. Имеем $а^2 = 116 + \sqrt{2007} + 116 - \sqrt{2007} - 2\sqrt{116^2 - 2007} = 232 - 2\sqrt{13456 - 2007} = 232 - 214 = 18$. Аналогично $в^2 = 6 - \sqrt{27} + 6 + \sqrt{27} + 2\sqrt{36-27} = 12 + 6 = 18$. Следовательно $а^2 = в^2$ и поэтому эти числа равны. Ответ: равны.

Задание 6. Разложим числа первой строки на простые множители: $10 = 2 \cdot 5$, $14 = 2 \cdot 7$, $495 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$, $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$. Сумма простых множителей первых двух чисел соответственно равна 7, 9, четвертого числа – 22. Поэтому пропущенное число будет 18. Ответ: $\{18\}$.

Задание 7. Имеем $\left|\frac{x^2(x-2)+1}{x-2}\right| = \left|x^2 + \frac{1}{x-2}\right|$ Поэтому неравенство можно записать в виде: $|а + в| < |а| + |в|$, где $а = x^2$, $в = \frac{1}{x-2}$. Это неравенство верно для всех а и в, удовлетворяющих условию $ав < 0$. В нашем случае получим: $x \neq 0$, $x - 2 < 0$. Следовательно ответ: $x < 2$; $x \neq 0$.

ФГБОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ОЛИМПИАДЫ
«ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2018-2019 УЧ. ГОД

Заключительный (очный) тур
9-10 классы

Вариант 2

Решение

Задание 1. Обозначим $x^2 = n$, $y^2 = m$, так как x, y – натуральные числа, то m, n – также натуральные числа, при этом m и n являются квадратами натурального числа. В новых обозначениях имеем: $2nm + m - 6n - 12 = 0$, $m(2n+1) = 6n + 12$ <=> $m = \frac{6n+12}{2n+1} = 3 + \frac{9}{2n+1}$ => $2n + 1$ является делителем числа 9. Значит $2n + 1$ равно либо 1, либо 3, либо 9. Если $2n + 1 = 1$, то $n = 0$ и $m = 12$, что невозможно. Если $2n + 1 = 3$, то $n = 1$ и $m = 6$, что также невозможно. И наконец при $2n + 1 = 9$ получим, что $n = 4$ и $m = 4$. А тогда $x = y = 2$. Проверка показывает, что эти числа есть решение уравнения, а других нет. Ответ: (2; 2).

Задание 2. Обозначим число оставшихся игроков через x. Тогда между собой они сыграли 105 партий. Отсюда получим: $x(x-1) = 210$. Решая это квадратное уравнение, находим, что $x = 15$. А тогда общее число участников турнира первоначально было 16 чел. Ответ: {16}.

Задание 3. Пусть ABC прямоугольный треугольник, где AB – гипотенуза, AC и BC катеты. Пусть K – точка касания окружности с гипотенузой, а M, N – точки касания окружности соответственно с катетами AC и BC. Пусть AK = 3 и KB = 2. Тогда как отрезки касательных, проведенные из одной точки, AM = 3, BN = 2. Обозначим CM = x, тогда по т. Пифагора имеем: $(3+x)^2 + (2+x)^2 = 25$. Отсюда имеем: $x^2 + 5x - 6 = 0$, значит $x = 1$, а тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$. Ответ: {6}.

Задание 4. Пусть $100x^3 - 99 = y$, тогда имеем систему: $\begin{cases} 100x^3 = 99 + y \\ 100y^3 = 99 + x \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получим $100(x^3 - y^3) = y - x$ <=> $100(x-y)(x^2 + xy + y^2) = -(x-y)$. Значит либо $x = y$, либо $x^2 + xy + y^2 = -\frac{1}{100}$. Последнее равенство невозможно т.к. $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$. Поэтому $x = y$, т.е. $100x^3 = 99 + x$. А тогда $100x^3 - 100 = x - 1$, $100(x^3 - 1) = x - 1$, значит либо $x = 1$, либо $100(x^2 + x + 1) = 1$ => $x^2 + x + 1 = \frac{1}{100}$, $x^2 + x + 0{,}99 = 0$. Так как это уравнение не имеет решений, то ответ: {1}.

Задание 5. Под знаком квадратного корня в первом из чисел стоит полный квадрат выражения: $\sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{5} + \sqrt{2} + 1$. Поэтому это число меньше числа $\sqrt{5} + \sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$. Значит второе число больше первого числа. Ответ: второе число больше.

<u>Задание 6.</u> Разложим на простые множители числа в первом ряду получим: 27 = 3·3·3, 48 = 2·2·2·2·3, 114 = 2·3·19, 429 = 13·3·11. Находим сумму простых множителей для каждого числа: 3+3+3 = 9, 2+2+2+2+3 = 11, 13+3+11 = 27. А тогда пропущенное число во втором ряду будет: 2+3+19 = 24. Ответ: {24}.

<u>Задание 7.</u> Имеем: $\left|\frac{2x^2-x+1}{2x-1}\right| = \left|x + \frac{1}{2x-1}\right|$. Если обозначим x = а, $\frac{1}{2x-1} = в$, тогда получаем неравенство : $|а + в| < |а| + |в|$. Это неравенство верно для всех $а \cdot в < 0$. В данном случае оно будет верно для 0 < x < 1/2 Ответ: $(0; \frac{1}{2})$.