# ФГБОУ ВО РУТ (МИИТ)
# МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ОЛИМПИАДЫ
# «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
# ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
# 2018-2019 УЧ. ГОД

***Заключительный (очный) тур***
***11 класс***

## Вариант 1

## <u>Решение</u>

**<u>Задание 1.</u>** Слева, под корнем стоит полный квадрат выражения $(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{2})^2$. Поэтому данное сравнение есть: $\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{2}$ V $\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}$. Отсюда сравним числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{2}$. Если обе части возвести в шестую степень, то получим 8 и 4. Следовательно первое число больше второго. Ответ: первое больше.

**<u>Задание 2.</u>** Пусть x км/час фактическая скорость мухи, y – км расстояние от дома мухи до базара. Тогда по условиям задачи имеем два уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x+1} = \dfrac{3}{4}\dfrac{y}{x} \\ \dfrac{y}{x-1} - \dfrac{5}{6} = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

из первого уравнения находим, что x скорость мухи равна 3 км/час, а из второго уравнения y = 5. Ответ: 5 км

**<u>Задание 3.</u>** ОДЗ данного уравнения будет $|x| \le 1$. Так как слева под корнем стоит полный квадрат, то получим $\frac{|x+\sqrt{1-x^2}|}{\sqrt{2}} = 1-2x^2$. Так как $|x| \le 1$, то сделаем замену $x = \sin t$, где $|t| \le +\frac{\pi}{2}$. Тогда получим $\frac{|\sin t+\cos t|}{\sqrt{2}} = \cos 2t$, где $\cos 2t \ge 0$. Возведем обе части в квадрат и преобразуем: $1+\sin 2t = 2\cos^2 2t \Rightarrow 2\sin^2 2t+\sin 2t-1=0$; $\sin 2t=-1$; $\sin 2t=\frac{1}{2}$. А тогда с учетом ограничений на $t$, получим $t_1 = -\frac{\pi}{4}$ и $t_2 = \frac{\pi}{12}$. В первом случае находим, что $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, во втором случае: $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
Ответ: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**<u>Задание 4.</u>** Пусть ABC данный треугольник, BN – биссектриса, AM – медиана, 0 – их точка пересечения, BO перпендикуляр к AM. $S_{OMN} = 2$. Найти $S_{ABC}$. Проведем высоту ВД на AC и обозначим ее h, тогда, если MK высота, то она $\frac{h}{2}$. Треугольники ABO и BOM равны как прямоугольные по общему катету BO и острому углу. Значит AO = OM и AB = BM. Из теоремы о биссектрисе следует, что AN : NC = 1 : 2. Поэтому, если AN = x, то NC = 2x. Так как $S = \frac{1}{2}h\cdot 3x$, то $hx = \frac{2S}{3}$. Далее имеем равенство: $\frac{S}{4}+2+\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot 2x = \frac{1}{2}\cdot h\cdot 2x \Rightarrow$
$\frac{S}{4}+2+\frac{hx}{2} = hx$
$\frac{S}{4}+2 = \frac{hx}{2} = \frac{2S}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{S}{3} \Rightarrow S = 24$.
Ответ: $\{24\}$.

**Задание 5.** Из системы находим, что xy = $\frac{1}{2}(5a^2 - 4a - 1)$. Правая часть этого равенства есть парабола, которая принимает наименьшее значение в вершине параболы при $a_0 = \frac{2}{5}$. Значение функции в этой точке $f(\frac{2}{5}) = -\frac{9}{10}$. Таким образом, min (xy) будет равен $-\frac{9}{10}$ при а = $\frac{2}{5}$. Осталось проверить, что при а = $\frac{2}{5}$ исходная система имеет решение. При а = $\frac{2}{5}$ получим $\begin{cases} x + y = \frac{1}{5} \\ xy = -\frac{9}{10} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{5} - y \\ \left(\frac{1}{5} - y\right) y = -\frac{9}{10}, \; y^2 - \frac{y}{5} - \frac{9}{10} = 0 \;\; 10y^2 - 2y - 9 = 0 \end{cases}$

Так как это уравнение имеет решение при Д/4 = 91 > 0, то минимальное значение достигается. Ответ: $\{\frac{2}{5}\}$.

**Задание 6.** ОДЗ $x \geq 0, y \geq 0$ Из первого уравнения находим, что $x = 9 + y - 6\sqrt{y}$ и $y \leq 9$. Из второго уравнения $x = 23 + y - 10\sqrt{y+3}$, $y \leq 22$ приравнивая x, получим: $9 + y - 6\sqrt{y} = 23 + y - 10\sqrt{y+3}$, $5\sqrt{y+3} = 3\sqrt{y} + 7$ => $8y - 21\sqrt{y} + 13 = 0$ => $y_1 = 1$ $y_2 = \frac{169}{64}$. А тогда Ответ: $\{(4; 1); (\frac{121}{64}; \frac{169}{64})\}$.

**Задание 7.** Разделим обе части уравнения на число 9 · 25. Получим $3^{|x-5|+|x-3|-2} + 5^{|x-4|+|x-6|-2} = 2$. Так как расстояние от точки 3 до т. 5, также как расстояние от т. 4 до т. 6 равно 2, то по свойству модулей получим, что $|x-3| + |x-5| - 2 \geq 0$, $|x-4| + |x-6| - 2 \geq 0$, и следовательно по свойству показательной функции как первый, так и второй множитель больше или равны 1. Следовательно, чтобы равенство выполнялось, необходимо, что бы каждый из множителей слева равнялся 1. Это возможно лишь когда $\begin{cases} |x-3| + |x-5| = 2 \\ |x-4| + |x-6| = 2 \end{cases}$ => $\begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$ => $4 \leq x \leq 5$. Ответ: [4;5].

**Задание 8.** Пусть искомая сумма равна S. Тогда $2S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots 100 \cdot 2^{100}$ отсюда $2S - S = 100 \cdot 2^{100} - (1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^{99}) = 100 \cdot 2^{100} - (2^{100} - 1) = 99 \cdot 2^{100} + 1$.
Ответ: $1 + 99 \cdot 2^{100}$.

**ФГБОУ ВО РУТ (МИИТ)**
**МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ОЛИМПИАДЫ**
**«ПАРУСА НАДЕЖДЫ»**
**ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»**
**2018-2019 УЧ. ГОД**

***Заключительный (очный) тур***
***11 класс***

**Вариант 2**

## Решение

**Задание 1.** Под знаком квадратного корня в первом из чисел стоит квадрат выражения $(\sqrt{5}-\sqrt{2}+1)^2$. Поэтому данное сравнение будет: $\sqrt{5}-\sqrt{2}+1$ v $\sqrt{3}+1{,}5-\sqrt{2}$, а тогда имеем $\sqrt{5}$ v $\sqrt{3}+0{,}5$. Возводим обе части в квадрат, получим 5 v $3+\sqrt{3}+\frac{1}{4}$ => $\frac{7}{4}$ v$\sqrt{3}$. Еще раз возводим в квадрат: $\frac{49}{16}$ v 3 или 49 v 48. Следовательно первое число больше. Ответ: первое число больше.

**Задание 2.** Покажем, что наименьшее число ударов, которыми Иван - Царевич может срубить Змею все головы и хвосты, равно 9. Сделать это можно, например, так: 1-м и 2-м ударами Иван – Царевич соответственно снесет 2 головы и 2 хвоста. Змей – Горыныч станет обладателем 1 хвоста, а также двух голов. Эти головы можно снести 3-м ударом. Останется 1 хвост. На этот хвост придется 4-й удар, после чего у Змея – Горыныча будет 2 хвоста. Следующий 5-й удар по одному из этих хвостов приведет к 3 хвостам. 6-й удар по 2 хвостам даст Змею вместо них 1 голову. 7-й удар по оставшему хвосту дает Змею 2 хвоста. Если эти хвосты срубить 8-м ударом, то у Змея окажутся 2 головы. Их останется снести 9-м ударом. Ответ: {9}.

**Задание 3.** Методом подбора предварительно найдем один корень данного уравнения. Это будет x = 3. Далее сделаем подстановку: $\sqrt{1+x}=t$, $1+x=t^2$, $x=t^2-1$. Заменяя x через t, получим уравнение: $6t^4+7t^3-36t^2-7t+6=0$. Так как x = 3 является корнем, то t = 2 будет корнем уравнения относительно t. Деля левую часть этого уравнения на множитель t -2, получим: $6t^3+19t^2+2t-3=0$. Будем искать целые корни этого уравнения, это будут делители свободного члена. Пусть t = -3. Тогда, если разделить на t + 3, мы получим многочлен $6t^2+t-1=0$. Так как t = -3 меньше нуля, то следовательно это будет посторонний корень исходного уравнения. Решая квадратное уравнение относительно t находим еще два корня: $t_1=-\frac{1}{2}$, этот корень также посторонний и $t=\frac{1}{3}$. А тогда $x=-\frac{8}{9}$. Ответ: $\{-\frac{8}{9}, 3\}$.

**Задание 4.** Пусть ABC данный треугольник площади 60, AM – медиана проведенная на сторону BC и BK перпендикулярно AM, где BK биссектриса угла B. Обозначим AK = x, тогда так $\Delta APB=\Delta BPM$, то AB = BM и следовательно по свойству биссектрисы KC = 2x. Если BF = h – высота треугольника ABC, то высота, проведенная из точки M на сторону AC равна $\frac{h}{2}$. По условию $S=\frac{1}{2}h\ 3\ x=60$ => hx = 40, а тогда

$S_{MKC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot 2x = 20$ и значит $S_{BKM} = 20$. С другой стороны, $S_{ABM} = \frac{1}{2}S = 30$, поэтому $S_{BPM} = 15$. Отсюда получаем, что $S_{KPM} = 20 – 15 = 5$. Ответ: {5}.

**Задание 5.** Из второго равенства с помощью первого равенства находим, что исходная система будет равносильна системе $\begin{cases} 3x + y = a + 2 \\ 3\,xy = \frac{1}{2}\,(a^2 - a + 6) \end{cases}$ По теореме обратной к теореме Виета, числа 3x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2 – (a+2)\,t + \frac{1}{2}(a^2 – a + 6) = 0$. Для их существования необходимо и достаточно выполнения условия Д $= (a + 2)^2 - 2(a^2 – a + 6) \geq 0 \iff 2 \leq a \leq 4$. Рассматривая произведение xy как функцию a и учитывая монотонное возрастания этой функции на отрезке [2,4], приходим к ответу $\max(xy) = \frac{1}{6}(a^2 – a + 6)\,|_{a=4} = 3$. Ответ: {4}.

**Задание 6.** Разделим обе части уравнения на число 64·49. Тогда получим $7^{|x-2| + |x-4| - 2} + 8^{|x-1| + |x-3| -- 2} = 2$. Так как для любых действительных x верны неравенства $|x – 2| + |x – 4| \geq 2$ и $|x – 1| + |x – 3| \geq 2$, то левая часть уравнения больше или равна правой, причем равенство достигается в случае, когда

$\begin{cases} |x-2| + |x-4| = 2 \\ |x-1| + |x-3| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq x \leq 3$. Ответ: [2; 3]

**Задание 7.** Из второго уравнения системы следует, что $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$. Тогда из первого уравнения системы, с учетом этого, получаем, что $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, но тогда по свойству степеней $x^5 \geq x^6$ и $y^5 \geq y^6$, т.е. $x^5 + y^5 \geq x^6 + y^6$. По условию $x^5 + y^5 = x^6 + y^6$, это означает, что оба неравенства $x^5 \geq x^6$ и $y^5 \geq y^6$ должны обращаться в равенства. Значит нужно решить систему $\begin{cases} x^5 = x^6 \\ y^5 = y^6 \end{cases}$. Отсюда получаем ответ:{(0; 1); (1; 0)}.

**Задание 8.** Пусть искомая сумма ряда равна S. Разделим каждый член данного ряда на 2. $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \frac{7}{32} + \cdots = \frac{S}{2}$ . Вычтем полученный ряд из данного ряда. Получим ряд: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$, т.е. имеем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию (без учета первого члена). Её сумма равна 1, следовательно сумма второго ряда равна $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. С другой стороны, сумма этого ряда есть число S – S/2 = S/2. Таким образом, $\frac{S}{2} = \frac{3}{2}$ и следовательно S = 3. Ответ: {3}.

**ФГБОУ ВО РУТ (МИИТ)**
**МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ОЛИМПИАДЫ**
**«ПАРУСА НАДЕЖДЫ»**
**ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»**
**2018-2019 УЧ. ГОД**

***Заключительный (очный) тур***
***11 класс***

**Вариант 3**

## Решение

**Задача 1.** Данное сравнение будет равносильно сравнению $e^{\sqrt{3}\,ln2}$ v $e^{\sqrt{2}\,ln3}$ <=> $\sqrt{3}\,ln2$ v $\sqrt{2}\,ln3$ <=> $\sqrt{1{,}5}$ v $\frac{ln3}{ln2}$. Покажем, что $\sqrt{1{,}5} < 1{,}25$. Действительно $1{,}5 < (5/4)^2 = \frac{25}{16} = 1{,}5625$. Далее: $\frac{ln3}{ln2} = \log_2 3$. Поэтому сравним числа $\log_2 3$ и $\log_2 2^{5/4}$ <=> 3 v $2^{5/4}$ <=> ($3^4$ v $2^5$), 81 > 32. Следовательно $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$. Ответ: первое число меньше второго числа.

**Задача 2.** Пусть в $10^{а}$ классе прогуливали уроки a человек, тогда в $10^{б}$ классе aq – человек и в $10^{в}$ классе $aq^2$ – человек, где q – знаменатель геометрической прогрессии; по условию q – натуральное число ≥ 2. Из условий задачи получим уравнение: $5a + 6\,a\,q + 7\,aq^2 = 90$. Отсюда $a(5 + 6\,q + 7\,q^2) = 90$. Так как q ≥ 2, то выражение $5 + 6\,q + 7\,q^2 \geq 5 + 12 + 28 = 45$. Так как число a натуральное ≥ 1, то данное равенство возможно лишь при $5 + 6\,q + 7\,q^2 = 45$. А тогда a = 2 и q = 2. Ответ: {2, 4, 8}.

**Задача 3.** ОДЗ $4 - x^2 > 0$, $x^2 < 4$, $|x| < 2$. $8\,x^3 = (4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}$, $(2x)^3 = (4 - x^2)^{3/2}$, $(2x)^{3\cdot 2/3} = (4 - x^2)^{3/2\cdot\, 2/3}$ <=> $4x^2 = 4 - x^2$, $5\,x^2 = 4$ $x^2 = \frac{4}{5}$, $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Ответ: $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

**Задача 4.** Пусть ABC данный прямоугольный треугольник с гипотенузой AC. Обозначим AN = x, NC = y, BK = h – высота треугольника ABC, MN = $h_1$. Проведем из точки M прямую параллельную AC до пересечения с высотой BK в точке E. пусть ME = t. Решение. По условию $\frac{1}{2}h_1 \cdot y = \frac{3}{8}h\,(x + y)\cdot\frac{1}{2}$ => $1 = \frac{3}{8}\frac{h\,(x + y)}{h1\cdot y} = \frac{3}{8}\frac{h}{h1}\left(1 + \frac{x}{y}\right)$. Пусть $\frac{h}{h1} = m$, $\frac{x}{y} = n$, тогда $(1 + n)\ m = \frac{8}{3}$. Из подобия треугольников MBE и AMN следует, что $\frac{h-h1}{t} = \frac{h1}{x}$ => $t = x\,(m - 1)$. Также из подобия находим, что $\frac{h}{y- t} = \frac{h1}{x}$ => $h\,x = h_1\,(y - t)$ => $t = y - mx$. Приравнивая два выражения для $t$ имеем: $x\ (m - 1) = y - mx$ => $m = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. А тогда $\frac{8}{3} = (1 + n)\cdot\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ Поэтому $\frac{8}{3} = \frac{(1+n)^2}{2n}$, $16n = 3n^2 + 6\,n + 1$, $n^2 - \frac{10}{3}\,n + 1 = 0$, $n = \frac{1}{3}, n = 3.$ Ясно, что x < y поэтому ответ: $\{\frac{1}{3}\}$.

**Задача 5.** Преобразуя систему, получим $\begin{cases} 2x + y = a + 1 \\ (2x + y)^2 - 4xy = 4\,a^2 - a + 1 \end{cases}$ => $\begin{cases} 2x + y = a + 1 \\ 2xy = \frac{(a+1)^2 - 4a^2 + a - 1}{2} = \frac{3a - 3a^2}{2} \end{cases}$ По теореме, обратной к теореме Виета, числа 2x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2 - (a + 1)t + \frac{3}{2}\,(a - a^2) = 0.$ Для их существования необходимо и достаточно, чтобы дискриминант $D = (a + 1)^2 - 6\,(a - a^2) \geq 0$

<=> 7 $a^2 - 4a + 1 \geq 0$ Что верно для любого a, и значит max xy будет при a = $\frac{1}{2}$ в вершине параболы $\frac{3}{2}(a - a^2)$. Этот максимум будет равен $\frac{3}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$. Ответ : a = $\frac{1}{2}$ .

**Задача 6.** Поделим обе части уравнения на 16·9, получим $3^{|x-5| + |x-7| -2} + 4^{|x-6| + |x-8| -2} = 2$. Так как $|x-7| + |x-5| \geq |x-7 - x + 5| = 2$ и $|x-8| + |x-6| \geq |x-8 - (x-6)| = 2$, то число $3^{|x-5| + |x-7| -2} \geq 1$, аналогично $4^{|x-6| + |x-8| -2} \geq 1$ и тогда левая часть равенства $\geq 2$. Следовательно равенство выполняется только тогда, $\begin{cases} |x-5| + |x-7| = 2 \\ |x-6| + |x-8| = 2 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} 5 \leq x \leq 7 \\ 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$ <=> $6 \leq x \leq 7$. Ответ[6;7]

**Задача 7.** Запишем систему в виде: $\begin{cases} \sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-1}}{y} = 1 \end{cases}$ ОДЗ $x \geq 1$, $y \geq 1$.

Рассмотрим второе уравнение и функцию $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$, находим ее производную: $f^1 = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{x-2x+2}{x^2\, 2\sqrt{x-1}} = \frac{2-x}{2\sqrt{x-1}\, x^2}$. Ноль производной будет точка x = 2. В этой точке производная меняет знак с «+» на «-». Поэтому это точка максимума функции. Находим $f_{max} = \frac{1}{2}$. Аналогично max $Q(y) = \frac{\sqrt{y-1}}{y} = \frac{1}{2}$. Следовательно сумма этих функций может равняться 1 только при x = 2, y = 2. Подставляя эти числа в первое уравнение системы, убеждаемся, что это будет решение. Ответ: x = 2, y = 2.

**Задача 8.** Воспользуемся тождеством кк! = (к + 1)! – к ! тогда имеем: 2! – 1! + 3! – 2! + 4! – 3! + 5! – 4! +… + 2018! – 2017! + 2019! – 2018! = 2019! -1 Ответ: 2019! -1