

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

ВУХО НАМ

РАСЧЕТ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН НА ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ

05.23.17 – Строительная механика

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель
доктор технических наук,
профессор **Габбасов Р.Ф.**

Москва – 2018г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Обзор работ по расчету анизотропных пластин на статические и динамические нагрузки.	9
1.1. О расчете анизотропных пластин аналитическими и численными методами.	9
1.2. Метод конечных разностей (МКР).....	17
1.3. Метод конечных элементов (МКЭ).....	19
1.4. О методе последовательных аппроксимаций (МПА).....	22
1.5. Вывод по главе 1.....	25
Глава 2. Разработка алгоритма расчета ортотропных пластин на статические нагрузки с использованием разностных уравнений МПА.	26
2.1. Дифференциальное уравнение изгиба. Основные формулы краевые условия для плиты прямоугольного очертания.	26
2.2. Приведение уравнений к безразмерному виду и их преобразование.	30
2.3. Аппроксимация дифференциальных уравнений и краевых условий разностными уравнениями МПА.	35
2.4. Составление алгоритма расчета и программы для ЭВМ.	41
2.5. Решение тестовых задач по разработанной методике.....	48
2.6. Расчет изгибаемых плит с использованием обобщенных уравнений МКР..	58
2.7. Выводы по главе 2.....	64
Глава 3. Численное решение задач о свободных и вынужденных колебаниях ортотропных пластин.	68
3.1. Алгоритм расчета ортотропных плит по определению частот и форм собственных колебаний.	68
3.2. Примеры расчета ортотропных плит по определению частот и форм собственных колебаний.	72
3.3. Методы прямого интегрирования дифференциальных уравнений вдоль оси времени.	78
3.4. Разработка методики расчета на вынужденных колебания.....	80

3.5. Алгоритм расчета на динамические воздействия	87
3.6. Вывода по главе 3.....	90
Глава 4. Примеры расчет пластин на динамические нагрузки	91
4.1. Примеры расчета изотропных плит на динамические нагрузки.....	91
4.2. Решение новых задач по расчету ортотропных пластин на динамические нагрузки.....	97
4.3. Выводы по главе 4.....	103
Заключение.....	104
Литературы.....	105

ВВЕДЕНИЕ

Плиты из анизотропного (в частности, из ортотропного) материала широко применяются в строительстве, испытывая при этом часто динамические воздействия. Известных в литературе исследовательских работ по расчету ортотропных пластин на динамические нагрузки практически нет.

В настоящей диссертационной работе планируется разработка численной методики расчета ортотропных плит «различными краевыми условиями» на действие таких динамических нагрузок, как гармоническая нагрузка, мгновенный импульс, удар и т.д.. Результаты работы в виде программы для электронных вычислительных машин (ЭВМ) предполагается внедрить в практику инженерных расчетов.

Актуальность темы диссертации.

В строительстве широкое применение находят конструкции, работа которых, может быть представлена моделью анизотропной, а в частности ортотропной, пластины. Это железобетонные перекрытия, ребристые плиты, сталежелезобетонные перекрытия и т.п. Часто, внешним воздействием на эти конструкции, является динамическая нагрузка. Не для всех задач возможно получить решение в аналитической форме.

Самым распространенным и универсальным методом для расчета строительных конструкций, в настоящее время, является метод конечных элементов (МКЭ). Однако достоверность численных решений, может быть подтверждена надежно, лишь совпадением результатов, полученных двумя различными методами.

Поэтому разработка эффективной численной методики расчета вышеуказанных конструкций на динамическое воздействие, на базе разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА), является актуальной задачей

Целью диссертационной работы является разработка эффективного численного алгоритма расчета поперечных колебаний ортотропных пластин с различным условиями на краях.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- разработка методики расчета ортотропных пластин на статические и динамические нагрузки.
- составление алгоритма и программы для ЭВМ по расчету ортотропных пластин на статические и динамические нагрузки.
- использование общей программы, реализующей алгоритм расчета ортотропных пластин, для расчета ортотропных пластин на изгиб и ортотропных плит на статические и динамические нагрузки.
- сравнение полученных результатов с известными аналитическими и численными решениями.
- решение новых задач по расчету ортотропных пластин на динамические нагрузки.

Научную новизну составляют результаты:

- ✓ Алгоритм расчета ортотропных плит по определению частот и форм собственных колебаний.
- ✓ Разработка методики расчета ортотропных плит на вынужденные колебания.
- ✓ Решение новых задач по расчету ортотропных пластин на динамические нагрузки.

Достоверность полученных результатов подтверждается сравнением с аналитическими решениями задач в известных работах и с другими численными решениями, выполнением интегральных условий равновесия, численным исследованием сходимости решения.

Теоретическая и практическая значимость: заключается в разработке эффективных численных алгоритмов и программ для расчета ортотропных изгибаемых пластин. Программы позволяют учитывать:

- краевые условия задачи;
- расчет ортотропной пластины на статические и динамические нагрузки;
- возможность перехода к расчету изотропных плит.

Кроме того, показано, что плиты при небольшом числе разбиений с достаточно высокой точностью можно рассчитывать вручную. Последнее обстоятельство позволяет рекомендовать разработанную методику расчета для использования в учебном процессе, что весьма важно для образовательной системы развивающихся стран, в том числе Вьетнам.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы были представлены на следующих конференциях :

- Международная научно-практическая конференция «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы», посвященная 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РААСН, профессора, доктора технических наук Н.Н. Леонтьева, 110-летию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР, профессора, доктора технических наук В.З. Власова. НИУ МГСУ.
- Международной научно-практической конференции «Инновационные исследования: проблемы внедрения результатов и направления развития». МЦИИ «Омега Сайнс».
- XII Международной научно-практической конференция «Advances in Science and Technology». Научно-издательский центр ООО «Актуальность.РФ»

Публикации. По теме диссертации опубликовано 2 печатных работы в рецензируемых журналах, рекомендуемых ВАК для публикации результатов кандидатских диссертаций.

На защиту выносятся:

- алгоритмы расчета ортотропных пластин на различные статические и динамические нагрузки для вычислительной машины;

- результаты решения новых задач по расчету ортотропных пластин на динамические нагрузки.

объём работы. Диссертация содержит введение, четыре главы, заключение, списка литературы. Общий объем диссертации составляет 118 страниц, в текст включены 19 рисунков и 21 таблиц.

Структура и содержание работы.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы.

Во введении описываются: актуальность темы диссертации, степень ее разработанности, основные цели и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, методология и методы исследования, положения выносимые на защиту, достоверность результатов и апробация работы.

В первой главе приводится обзор литературы по расчету анизотропных пластин аналитическими и численными методами. Основное внимание уделяется работам по расчету ортотропных пластин. Отдельными параграфами рассмотрено применение современных численных методов, таких как МКЭ, МПА и метод конечных разностей МКР.

Во второй главе разрабатывается методика расчета ортотропных пластин на действие статических нагрузок с привлечением разностных уравнений МПА. Приводятся тестовые примеры расчета.

В третьей главе рассматриваются задачи поперечных колебаний ортотропных пластин. В первом параграфе рассмотрены свободные колебания пластин без учета диссипативных сил, приведены примеры расчета. Во втором параграфе на основе метода прямого интегрирования вдоль временной оси разработана численная методика расчета ортотропных пластин на динамические нагрузки с учетом сил сопротивления по модели Фойгта.

В четвертой главе приводятся примеры расчета изотропных и ортотропных пластин соответственно, на динамические нагрузки, с использованием составленной для ЭВМ программы.

Глава 1. Обзор работ по расчёту анизотропных пластин на статические и динамические нагрузки.

1.1. О расчете анизотропных пластин аналитическими и числительными методами.

Многие известные российские и зарубежные ученые, такие как И.Г.Бубнов. [15], Б.Г.Галеркин [48], С.П.Тимошенко, С.Войновский-Кригер [120] уделяли пристальное внимание расчету изотропных пластин, в линейной и нелинейной постановке, постоянной и переменной жесткости. Помимо этих фундаментальных трудов данным вопросам посвящено множество работ других учёных. Для глубокого анализа рассматриваемого аспекта в данной подглаве стоит акцентировать внимание на работах по расчету анизотропных пластин, в особенности - ортотропных изгибаемых.

С.Г. Лехницкий дал четкое понятие теории расчета анизотропных пластин в своих монографиях [78,79]. В них можно найти основные уравнения данной теории, а также “С.Г. Лехницкий рассматривает плоскую задачу, исследует изгиб анизотропных балок, а также изучает концентрацию напряжений в окрестностях эллиптического и кругового отверстий” [25]. [78,79] можно найти и выводы по разрешениям определенных задач по расчету анизотропных и ортотропных пластин. Стоит отметить, что помимо решения в “рядах и получения точных результатов для некоторых частных случаев” [117], С.Г. Лехницкий рекомендует аппроксимативный метод определения прогибов анизотропной пластинки. Монография С.А.Амбарцумяна - иной “фундаментальный труд, который посвящен теории анизотропных пластин” [5]. Главное отличие этой работы от работы С.Г. Лехницкого заключается в том, что в ней описываются уточненные теории изгиба анизотропных пластин. Они представляют собой определенные приемы учета воздействия поперечных сдвигов и нормального напряжения в

задачах изгиба, устойчивости и колебаний анизотропных пластин” [117]. Также в монографии С.А.Амбарцумяна описываются нелинейные уточненные теории, проанализированы пластинки, а также решены многие задачи посредством уточненных теорий. В этой монографии не представлены анизотропные пластины на упругости, а также не использованы численные методы.

Стоит отметить авторов, также посвятивших свои работы данной теме. Это работы описанного выше С.А.Амбарцумяна [6] и Д.В.Пештмалджяна [102]. В них представлены:

- “расчет свободно опертых прямоугольных в плане сферической и цилиндрической анизотропных оболочек под синусоидальной нагрузкой по уточненной теории” [117];
- сравнение результатов по всевозможным вариантам уточненной теории.

Статья Л.А.Агаловяна посвящена конкретизации классической теории изгиба анизотропных пластин [АП] [2]. В ней можно заметить, что напряженное и деформированное состояние анизотропной пластинки возможно представить в виде совокупности деформированных и трех напряженных состояний:

- 1 состояние соответствует классической изгиба АП.
- 2 оставшихся определены управлением двух вспомогательных процессов.

Решение задачи по поводу расчета свободно опертых ОП посредством двойных рядов нерелевантно для практики ввиду того, что ряды для моментов и перерезывающих сил сходятся медленно. Данные мысли представил В.В.Бадагадзе в своей статье [13]. Если говорить о методологии, то он

придерживается метода при помощи уравнения МКР в работе Ш.Е. Микеладза применительно изотропных плит.

Е.Ф. Бурмистрова и Н.М. Маслова [17, 89] исследовали расчеты изгибаемых круглых ОП переменной жесткости.

В монографии [108] в систематизированном виде излагается линейная теория нетонких и неоднородных анизотропных пластин и с учетом поперечных сдвигов, нормальных напряжений, в нормах и срединной поверхности и нелинейности распределения по толщине. Рассматриваются также слоистые пластины и оболочки.

В работе [3] одного из авторов асимптотический метод применяется для решения неклассических задач пластин и оболочек, т.е. задач, когда на лицевых поверхностях заданы граничные условия, отличные от классических условий для пластин и оболочек.

А.А. Галаси в своей статье рассматривает изгиб полубесконечной анизотропной пластинки с подкрепленным краем [47]. Он дал предположение о том, что существует плоскость упругой в каждой точке пластинки симметрично, которая параллельна с срединной плоскости.

“Однородная трансверсальная изотропная пластинка, плоскость изотропии” [98] которой совпадает с срединной плоскостью, рассматривается в статье [98]. Она решается методом “асимптотического интегрирования уравнений” [25], с небольшим параметром производных.

“Для пластин экспоненциального профиля” [100], можно найти следующие выводы: “даны общие решения для изгибающих моментов и прогибов; приводятся примеры расчета; показано воздействие анизотропии на величину предельного момента в случае жесткого закрепления контура пластинки” [117].

Прогибов прямоугольной ОП с “жестко заделанными краями” выявлена в работе И.И.Трянина [124]. Для того, чтобы решить данную задачу, И.И.Трянин также рассмотрел “случай действия равномерно распределенной поперечной нагрузки” [117] и сравнил итоги использованного метода. Было выявлено, что для применения в практических намерениях возможно и первое приближение, которое обеспечивает точность определения прогибов и напряжений до 1-2%.

Изгиб ортотропных пластинок подробно рассмотрен в статье Ф.Бадалова. Для решения поставленной задачи требуется сведение ее к системе дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. Например, описывается опертая по контуру прямоугольная пластинка и эллиптическая плита.

Завершая рассмотрение работ, посвященных статистическому расчету анизотропных пластин, отметим [117], в которой излагается эффективная методика расчета ОП, использовании уравнений (МПА). Некоторые положения этой работы со ссылкой на автора будут использованы нами в последующих главах настоящей диссертации.

Перейдем к обзору работ колебаниях АП, в частности, ОП. В статьях Е.К.Нурмаганбетова и Г.Г.Касымова [97,98] используется метод декомпозиции для исследования свободных поперечных колебаний прямоугольных ОП с упругим контуром. Получена приближенная формула для основного тона свободных колебаний этих конструкций. Проведенные сравнения с известными решениями выявляют достаточную точность этой формулы для рассмотренных авторами некоторых частных случаев.

Метод декомпозиции использован также в работах [106,119] для изучения свободных колебаний ортотропных прямоугольных пластин с упругим контуром. В [106], в частности, также получены приближенная формула для частоты основного тона. Однако нет сравнения с результатами ранее опубликованной

статьи [98] и ссылки на нее. Отметим также, что метод, ранее известный как метод расчленения дифференциальных уравнений [109] в [106] и в других публикациях Г.И.Пшеничнова упорно называется методом декомпозиции без ссылки на предшествующих авторов.

В работе [111] рассматривается задача об оптимальном управлении колебаниями шарнирно по краям прямоугольной ОП при помощи внешних сил, нормально распределенных по ее поверхности.

В статье [95] путем разложения функции прогиба в ряд по малому параметру получена последовательность уравнений. Получено решение в нулевом и первом приближении. Методика решения задачи сложная и неудобна для практического применения.

В работе [91] рассматривается вариант ОПс учетом поперечных и сдвиговых деформаций. Строится вычислительный алгоритм, основанный на разностной аппроксимации исходного вариационного функционала. Преимущества такого подхода по сравнению с классической теорией.

В статье [22] даны оценки точности полученного решения дифференциального уравнения четвертого порядка, описывающего поведение ортотропной пластинки, подверженной динамическому воздействию. В [42] рассматривается задача о свободных колебаниях анизотропной (неортотропной) пластинки. В [4] рассмотрены вынужденные колебания ортотропных однослойных и двухслойных пластинок, вызванные гармоническими изменяющимися во времени перемещениями одной из лицевых поверхностей. Задачи сейсмическое воздействие. В [4] построена математическая модель колебаний гибких пластин, находящихся под действием продольных ударных нагрузок.

В работе С.И.Трушина [123] приведены “численные алгоритмы решения задачи о свободных колебаниях однослойных и многослойных пластин” [25]. Дан

пример расчета квадратной пластинки из композитного анизотропного материала с низкой сдвиговой жесткостью.

В [70] дан анализ установившейся реакции прямоугольной точечно-опертой ортотропной пластины на изложенную в центре синусоидального изменяющуюся во времени сосредоточенную силу. Уравнение пластины аппроксимировано конечно-разностными выражениями. Численно исследовано влияние механических свойств материала пластины на формы ее колебаний.

Из работ зарубежных авторов считаем необходимым остановиться на следующих.

В работе [85] получены формулы для вычисления частоты собственных колебаний прямоугольной ортотропной пластины при следующих закреплениях: два противоположных края жестко заделаны, а два других свободно оперты.

В [131] МКЭ применяется решения задач статики и динамики при различном композитных пластин. Экспериментально определена реакция системы на горчечное воздействие. В [132] дано описание вычислительного алгоритма для исследования колебаний прямоугольных ОП, заземленных и свободно опертых по краям. Использовано разложение решения по формам собственных колебаний. Дается оценка эффективности метода Релея-Ритца и МКЭ при использовании ЭВМ различной мощности. В [149] рассматриваются вынужденные колебания заземленных прямоугольных пластин из ортотропного материала. Функция прогиба задается в виде двойного тригонометрического ряда. Нагрузка произвольная. Решение получено итерационным методом в сочетании с процедурой Бубнова-Галеркина.

В [141] исследованы свободные колебания прямоугольных ортотропных пластин, контактирующих с упругим винклеровским основанием.

В [145] описан приближенный метод для изучения свободных поперечных колебаний анизотропных композитных прямоугольных плит с различными краевыми условиями. Исходные дифференциальные уравнения преобразованы в эквивалентные граничные интегральные уравнения и решены численным методом с определением собственных частот и форм поперечных колебаний. В [135] получено аналитическое решение задачи о свободных поперечных колебаниях консольных ортотропных пластин. Установлена быстрая сходимость предложенного аналитического решения. В [130] проводится анализ колебаний ортотропных прямоугольных пластин методом элементов. Учитываются изгибные перемещения и перемещения в плоскости пластин.

Далее в обзоре литературы рассматриваются работы по устойчивости анизотропных пластин. В [121] получены уравнения устойчивости ортотропных пластин, сжатой в двух направлениях, где учтено влияние деформаций сдвига. В качестве примера рассмотрена шарнирно опертая по контуру пластина, сжатая в одном направлении. Работа [81] также посвящена учету влияния поперечного сдвига на устойчивость ортотропных пластин. Приведенные в этой статье результаты показывают, что использование общепринятых теорий в ряде случаев приводит к завышению влияния сдвига на величину критических сил. В работе [46] получены приближенные формулы для определения критических сжимающих нагрузок прямоугольных ОПв случаях свободного опирания, жесткого защемления и комбинаций условий опирания.

В [3] рассмотрена устойчивость однородных анизотропных шарнирно опертых плит с учетом сдвига. Для исследования закритического поведения пластин исследованы уравнения Кармана. Прогиб представляется в виде двойного тригонометрического ряда. В [4] предлагается метод численного решения задачи на собственные значения дифференциальных операторов, к которым приводят

рассматриваемые задачи теории анизотропных пластин. Метод основан на аппроксимации решения тригонометрическими функциями.

В [79] рассматривается устойчивость композитной ортотропной пластины при неравномерном сжатии и изгибе. Выполнен анализ влияния на критический параметр размеров пластины, ее изгибных жесткостей и характера нагружения.

Из работ зарубежных авторов в области устойчивости анизотропных пластин следует отметить следующие. В [152] уравнения устойчивости шарнирно опертой прямоугольной ортотропной пластинки решаются тригонометрической подстановкой. Для случая двухосного сжатия и сжатия с растяжением получены зависимости от параметров волнообразования.

В [151] рассматриваются прямоугольные анизотропные композитные пластины при одноосном сжатии. Для исследования их устойчивости используются метод полос в сочетании с методом возмущений.

1.2. Метод конечных разностей (МКР).

Для многих краевых задач строительной механики и теории упругости с успехом применяются разностные методы. Это задачи расчета балок, пластин, оболочек на статические, динамические нагрузки и устойчивость. Идея метода заключается в замене дифференциальных операторов разрешающих дифференциальных уравнений разностными алгебраическими аналогами или, как их называют, конечными разностями. Для этого на область, занимаемую исследуемым объектом наносится расчетная сетка. Разрешающие дифференциальные уравнения приближенно заменяются конечно-разностными уравнениями, записываемыми для узлов сетки. Таким образом, искомая функция и ее производные вычисляются не во всей области, а только в узлах. Именно поэтому, такие методы еще называют сеточными.

Первым применением метода конечных разностей является решение Рунге для задачи кручения бруса. Дальнейшее развитие метод получил в работе Г. Маркуса по расчету изгибаемых пластин. В 1921 г. российским, а в те годы советским, ученым И.М. Рабиновичем метод был применен к расчету неразрезных балок.

Позже, метод конечных разностей был значительно развит П.М. Варваком, в основном для расчета пластин.

Дальнейшее развитие метод получил в работах: : Н.П.Абовского, О.Блейха, Д.В.Вайнберга, А.С.Вольмира, М.И.Длугача, М.С.Корнишина, К.К.Керопяна, А.П. Сеницына, В.И.Соломина и других.

Для расчета конструкций на упругом основании, как балок, так и плит, МКР был применен В.И. Соломиным. Основание при этом было представлено винклеровской моделью. Им же получено решение задачи для плиты, загруженной в углу, где в качестве основания рассматривалось упругое полупространство.

Расчетом плит на упругом основании, с привлечением разностного аппарата, занимались также С.Н.Клепиков и Г.М. Бобрицкий.

Здесь следует уточнить, что В.И. Соломиным и другими авторами при расчете плит на упругом полупространстве и упругом слое были использованы идеи, сформулированные Б.Н.Жемочкиным [59].

Отмечая недостатки метода, следует упомянуть о сложностях, возникающих при учете краевых условий. Это и угловые точки с пересечением краев разной жесткости, и смешанные краевые условия. Удовлетворение краевым условиям в этом методе производится весьма искусственно, зачастую с использованием законтурных точек. Чем выше порядок производных, участвующих в описании краевых условий, тем больше искусственность модели сказывается на точности результатов расчета.

Попытки преодоления этих недостатков были предприняты Д.В. Вайнбергом и его учениками [18]. Выражения для законтурных точек корректировались с привлечением вариационных методов.

1.3. Метод конечных элементов (МКЭ).

В строительной механике существует огромное множество методов решения задач теории упругости, но стоит выделить самый известный в последнее время - МКЭ. Он произошел вследствие желания сделать как можно ближе решение континуальных задач теории упругости к процедуре, которая будет схожа с алгоритмами строительной механики. В МКЭ происходит субституция континуального объекта сетом конечных элементов. Данная субституция была известна и ранее, но там был другой способ - применялись стержни, что давала возможность имплементировать методы строительной механики

Если углубиться в историю МКЭ, то стоит отметить, что МКЭ был отличен от нынешнего метода, так как он использовался без эксплуатации вариационных принципов. Поэтому динамика сопряжения конкретных составляющих в узлах пересечения сетки диктовалась в духе методики трансформаций в строительной механике стержневых систем с той дифференциацией, что аналитические значения функций формы были назначены самым простым в поле элемента.

Дж. Аргирис первым применил этот метод на практике. В 1955 г. им была высказана мысль о разделении конструкции на несопряженные элементы. Затем следовало идентифицировать матрицы жесткости несопряженных элементов, а потом эти участки соединить воедино. Эта работа послужила толчком для роста числа публикаций по тематике МКЭ, в особенности за рубежом.

Американские ученые Х. Мартин, М. Тернера, Р. Клафа, английские ученые О. Зенкевича и Ченга применяли МКЭ для решения задач теории упругости и строительной механики.

В 1961 был издан сборник переводов статей Дж.Аргириса в СССР. Затем последовательно появляются работы А.М.Масленикова, Н.Н.Шапошникова [127] и других.

Рассмотрим работы российских ученых Л.А.Розина, С.Б.Ухова. Они использовали МКЭ для расчета гидротехнических сооружений. Сущность данной работы заключалась в следующем: упругое базирование было представлено в виде континуальной среды или упругим полупространством. Ввиду этого, дискретная схема основания при этом получается расчленением упругого полупространства на конечные элементы треугольной и прямоугольной формы.

Главной идеей МКЭ является то, что он делает минимальным функционал энергии, приводя решение краевой задачи теории упругости к решению системы алгебраических уравнений. Это напоминает в какой-то мере вариационно-разностный метод. Метод конечных элементов состоит из следующих этапов:

- идеализация исследуемой системы, в таком случае, имеется предназначение вычисленных конструкций, в каковых формируются величины разрешающей функции и расчленение исследуемого предмета в окончательные компоненты нужной фигуры;
- подбор ключевых неизвестных и вида аппроксимирующих функций в элементе;
- формирование системы алгебраических уравнений.

Самыми необходимыми является первые три опции, которые дают понять количество и расположение расчетных узлов, геометрическую форму используемых конечных элементов, тип приближающих функций.

Анализируя, можно заметить, что в начальном пункте решения задачи нужно определить форму конечного элемента. Поэтому пристальное внимание уделяется свойствам конечных элементов.

Прямоугольные элементы – то, с помощью чего показываются достойные результаты. Но у них есть недостаток – в них довольно сложно аппроксимировать

произвольную область. Ввиду этого, было решено найти другие варианты. Одним из них было построение матриц жесткости треугольных элементов.

На следующем этапе акцентируется внимание на числа степеней свободы элементов и подбора нужного вида функций, которые аппроксимируют поле перемещений по области конечного элемента. Главная трудность на данном этапе – это выбор интерполирующего полинома, который удовлетворит условиям неразрывности, так как функции перемещений в точках контакта двух соседних элементов должны гарантировать непрерывность движений и углов поворота.

На заключительном этапе расчета конструкции по МКЭ также есть сложности, связанные при получении глобальной матрицы жесткости – важного этапа, – которая выражает реакции в углах элемента через неизвестные узловые перемещения.

Делая вывод, можно заметить, что несмотря на недостатки, существует множества преимуществ данного метода. К таким преимуществам относятся:

- нет зависимости процедуры МКЭ от характера граничных условий задачи;
- без усложнения расчета дает возможность брать нерегулярную сетку любой формы;
- матрица коэффициентов при основных неизвестных получается симметричной и имеет ленточную структуру.

Не зря этот метод считается одним из наиболее эффективных численных методов.

1.4. О методе последовательных аппроксимаций (МПА).

Методы интегрирующих и дифференцирующих матриц имеют очень коррелирующее отношение к численным методам решения краевой задачи для дифференциальных уравнений.

А.Ф.Смирное первым рассмотрел это понятие относительно решения одномерных задач. Он предложил рассчитывать данный метод следующим путем - благодаря специальной числовой (интегральной) матрице, которая дает возможность поочередно выводить младшие производные через старшие. Интерполяционные кривые Лагранжа дают возможность построить аппроксимирующие кривые.

Существует также так называемый метод дифференцирующих матриц, который очень схож с методом численного интегрирования дифференциальных уравнений. Этот метод был предложен А.В.Александровым. Он допускал, что матрица дифференцирования используется взамен интегральной матрицы. Теперь уже интерполяционные полиномы Лагранжа дают возможность построить аппроксимирующие кривые (не стоит использовать полиномы выше шестого порядка, если брать критерий точности).

Одной из главных идей этих двух методов - интегрирующей (можно найти в работах М.Б. Вахитова, Р.Ф. Габбасова, А.Ф.Смирнова, Б.Я.Лашенкова) и дифференцирующей (труды В.А. Смирнова, А.В. Александрова) матрицы – состоит в решении дифференциального уравнения, которые сводятся для решения матричного.

Сплайн – очень важная аппроксимирующая функция, которая применяется в прикладной и строительной механике. Об этом понятии можно найти информацию как в российских, так и зарубежных работах.

В работах [23,25] были разработаны интегральная и дифференциальная формы метода последовательных аппроксимаций, основная идея которого, выдвинутая ранее А.Ф.Смирновым и А.В.Александровым, состоит в последовательном использовании одной и той же интегрирующей или дифференцирования искомым функций и их производных. Таким образом, осуществляется последовательная аппроксимация искомой функции и каждой ее производной полиномом одного и того же порядка. Это обстоятельство позволяет метод условно назвать численным методом последовательных аппроксимаций [25]. В работе излагается интегральная и дифференциальная формы метода, основанного на последовательной аппроксимации искомой функции и каждой ее производной кубическими сплайнами. Здесь матрица дифференцирования получается дифференцированием кубической кусочно-полиномиальной функции. Путем аппроксимации искомой функции параболическими сплайнами получена матрица интегрирования. Для строительной механики сплайны на данный являются потенциальным вектором развития. Это суждено приведено в работах [23-25]. Специальный алгоритм расчета позволяет давать очень высокие точные результаты, хотя этот метод довольно простой, но он дает возможность находить решения задач с существенным количеством неизвестных.

Разностный метод последовательных аппроксимация, предложенный и разработанный Р.Ф.Габбасовым в работах [24,25], выявляясь за счет разбиение интервала (области) интегрирования дифференциальных уравнений на подобласти (элементы конечных размеров). Также автор продемонстрировал, что разностная форма показывает идентичные результаты, что и рассмотренные выше формы. Огромный плюс этого метода в том, что он очень релевантен в своем применении. Благодаря разностным уравнениям есть возможность решать практически все задачи, которые сводятся к единой системе дифференциальных уравнений (например, уравнение Пуассона). Как мы уже рассмотрели, для расчета плит используются следующие методы:

- разностные уравнения МПА;
- аппроксимирующее уравнение Пуассона;
- уравнения, учитывающие возможные разрывы функций.

Для решения задач по расчету плит, а также кручения стержней некругового поперечного сечения и плоской задачи теории упругости и термоупругости используются разностные уравнения МПА, которые аппроксимируют дифференциальные уравнения второго порядка более общего типа, в том числе с переменными коэффициентами.

Действительно, у МПА есть некоторые плюсы по сравнению с теми же методами конечных разностей и конечных элементов. Например, в работах [23,24] описано, чем этот метод, который используется в решении некоторых динамических задач строительной механики [23,24], отличается от МКЭ. Главная особенность состоит в том, что он является наиболее простым ввиду того, что не нужно составлять матрицы жесткости. Он также проще МКР, так не требуются уравнения, которые связывают законтурные и внутриконтурные точки.

Данные примеры, приведенные выше демонстрируют высокую точность и простоту алгоритма метода последовательных аппроксимаций. также задачи могут быть решены вручную. Складывая все эти плюсы, можно сделать вывод, что метод последовательных аппроксимаций применим и для решения многих задач по расчету ортотропных пластин, включая их расчет на устойчивость и действие статистических и динамических нагрузок.

1.5. Выводы по главе 1.

Делая вывод из приведенного выше обзора, можно отметить тот факт, что для решения задач в основном применяются аналитические методы, а также то, что расчету прямоугольных ортотропных плит уделяется большое внимание.

Для того, чтобы ответить на поставленную задачу - разработки эффективного алгоритма расчета ортотропных пластин, включая их расчет на динамические воздействия - выбирается разностная форма метода последовательных аппроксимаций (МПА). Плюсы этого метода приведены в §1.4.

Обосновывая выбор численного метода, отличного от МКЭ, можно сказать, что это связано, прежде всего, с участвовавшими в недавнее время авариями строительных объектов, в которых была заложена база расчета программы МКЭ. Инженерная практика показывает, что в распоряжении проектировщиков должны быть программы для ЭВМ, составленных на базе не одного, а разных численных методов

Глава 2. Разработка алгоритма расчета ортотропных пластин на статические нагрузки с использованием разностных уравнений МПА.

2.1. Дифференциальное уравнение изгиба. Основные формулы краевые условия для плиты прямоугольного очертания.

Считаем, что материал пластины в отношении своих упругих свойств обладает тремя плоскостями симметрии и они принимаются в качестве координатных плоскостей. Такие пластинки называется ортотропными [120].

Разрешающее дифференциальное уравнение поперечного изгиба ортотропных пластин имеет вид [116]:

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = q. \quad (2.1.1)$$

где: W – вертикальное перемещение точки плиты;

q – интенсивность распределенной по поверхности пластины поперечной нагрузки;

D_x, D_y – изгибные жесткости относительно осей y, x ;

H – жесткость на кручение;

После определения прогибов W из (2.1.1) изгибающие моменты в направлении координатных осей x, y ; крутящие моменты и поперечные силы вычисляются по следующим формулам [120]:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= - \left(D_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= - \left(D_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

$$M_{xy} = 2D_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}; \quad (2.1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right); \\ Q_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4)$$

В выражениях (2.1.1) – (2.1.4):

$$\left. \begin{aligned} H &= D_1 + 2D_{xy}; D_{xy} = \frac{G \cdot \delta^3}{12}; D_1 = \frac{E'' \cdot \delta^3}{12}; \\ D_x &= \frac{E'_x \cdot \delta^3}{12}; D_y = \frac{E'_y \cdot \delta^3}{12}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

$E'_x; E'_y; E''; G$ – упругие характеристики материала, которые определяются экспериментально; δ – толщина пластинки.

Мы будем исходить из предположения, что величины в (2.1.5) известны.

Если, как в случае железобетонных плит, $H = \sqrt{D_x D_y}$, то путем введения новой переменной $y_1 = y \sqrt{D_x / D_y}$ дифференциальное уравнение (2.1.1) можно привести к виду, справедливому для изотропных пластин [120]. Алгоритм расчета изотропных плит по МПА детально разработан в [25] относительно неизвестных M и W , где $M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu}$; ν – коэффициент Пуассона. Поэтому ниже мы рассмотрим общий случай, когда необязательно $H = \sqrt{D_x D_y}$.

Отметим, что для ортотропных плит, как и для изотропных, считаются справедливыми гипотезы Киргофа-Лява [120]. Это позволяет описывать краевые условия аналогично таковым в изотропных пластинах.

Полагая так, рассмотрим краевые условия при $y = 0$ (рис. 2.1).

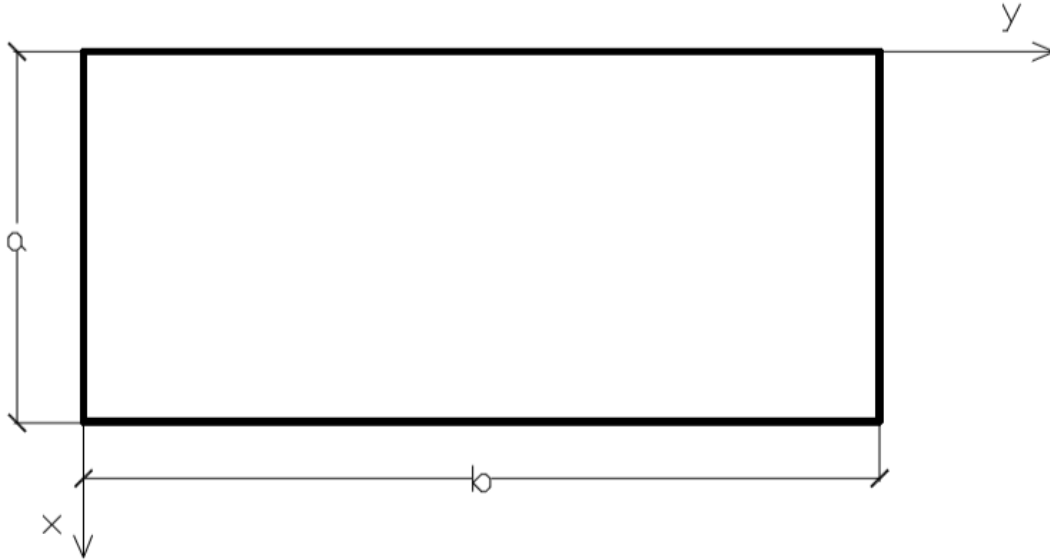


рис. 2.1

Шарнирное (свободное) опирание плиты в самом общем случае имеем: $W = W_0(x); M_y = M_y^0(x)$, т.е. при $y=0$ величины прогибов и изгибающих моментов в направлении оси y могут быть заданы в виде некоторой непрерывной дифференцируемой функции аргумента x . Тогда известно $\frac{\partial^2 W_0(x)}{\partial x^2}$, и из формулы (2.1.2) следует:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{1}{D_y} \left[M_y^0(x) + D_1 \frac{\partial^2 W_0(x)}{\partial x^2} \right]. \quad (2.1.6)$$

Для чаще встречающегося на практике случая $W_0(x) = 0; M_y^0(x) = 0$, получим:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0. \quad (2.1.6a)$$

Жестко заделанный край плиты:

$$W = W_0(x); \frac{\partial W}{\partial y} = W_y^0(x), \quad (2.1.7)$$

где $W_y^0(x)$ – заданные в виде функции x значения угла поворота $\frac{\partial W}{\partial y}$. В

частном случае:

$$W = 0; \frac{\partial W}{\partial y} = 0. \quad (2.1.7a)$$

Свободный от закреплений край: $M_y = M_y^0(x); V_y = V_y^0(x)$, где $V_y^0(x)$ – заданные значения обобщенной поперечной силы на краю плиты, в частности, равные нулю.

По [120]:

$$V_y = Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (2.1.8)$$

С учетом (2.1.3), (2.1.4) из (2.1.8) получим:

$$V_y = -D_y \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} - (H + 2D_{xy}) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y}. \quad (2.1.9)$$

Кроме краевых условий, могут потребоваться условия в угловых точках.

Рассмотрим эти условия при $x=0; y=0$ (рис.2.1).

Если пересекающиеся в углу стороны пластины шарнирно оперты или жестко заделаны, то в угловой точке: $W = W_0; \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W_0(x)}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W_0(y)}{\partial y^2}$, где W_0 – заданная осадка угловой точки; $W_0(x), W_0(y)$ – функционально заданные осадки плиты соответственно на краях при $y=0$ и $x=0$. В часто встречающихся задачах в угловой точке $W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$.

Если обе стороны плиты в угловой точке свободны от закреплений, то $M_x = M_x^0; M_y = M_y^0; R = R_0$, где M_x^0, M_y^0, R_0 – заданные значения M_x, M_y и сосредоточенной силы в угловой точке.

При заданных M_x, M_y соответствующие значения $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ можно найти из совместного решения уравнений (2.1.2). В реальных задачах: $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = R_0 = 0$.

Возможны ещё два случая: одна сторона свободно от закреплений, другая – или шарнирно оперта или жестко заделана. Здесь мы ограничиваемся рассмотрением однородных условий в угловой точке, т.е. когда заданные величины заведомо равны нулю: в первом случае $W_0 = 0$; $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$; во втором: $W = 0$; $\frac{\partial W}{\partial y} = 0$ или $\frac{\partial W}{\partial x} = 0$. При этом имеется в виду, что стороны плиты, пересекаясь под прямым углом, имеют в окрестностях точки пересечения некоторую переходную зону.

2.2. Приведение уравнений к безразмерному виду и их преобразование.

Для получения численного решения в общем виде запишем дифференциальное уравнение (2.1.1) аналогично [22] в безразмерном величинах:

$$\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\gamma \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = p, \quad (2.2.1)$$

$$\text{где: } \alpha = \frac{D_x}{D_y}; \gamma = \frac{H}{D_y}; p = \frac{q}{q_0}; \xi = \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{a}; w = \frac{WD_y}{q_0 a^4}; \quad (2.2.2)$$

q_0 – интенсивность нагрузки в фиксированной точке; a – длина одной из стороны плиты.

По (2.2.2) видно, что после определения безразмерных прогибов w можно вычислить размерные величины w при любых заданных значениях D_y, q_0, a .

Аналогично в безразмерных величинах можно записать прочие дифференциальные выражения. Из (2.1.2) - (2.1.4) следует:

$$\left. \begin{aligned} m^{(\xi)} &= -\left(\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right); \\ m^{(\eta)} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right); \\ m^{(\xi\eta)} &= \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}; \end{aligned} \right\} \quad (2.2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} q^{(\xi)} &= -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right); \\ q^{(\eta)} &= -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right); \end{aligned} \right\} \quad (2.2.4)$$

В этих формулах:

$$\begin{aligned} m^{(\xi)} &= \frac{M_x}{q_0 a^2}; m^{(\eta)} = \frac{M_y}{q_0 a^2}; m^{(\xi\eta)} = \frac{M_{xy}}{q_0 a^2}; \\ q^{(\xi)} &= \frac{Q_x}{q_0 a}; q^{(\eta)} = \frac{Q_y}{q_0 a}; \mu = \frac{D_1}{D_y}; \lambda = \gamma - \mu. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Выражения, описывающие краевые условия, такие можно записать в безразмерных величинах. Для случая однородных условий, в частности, будем иметь по §2.1 для края $\eta = 0$ следующее.

Шарнирно опертый край:

$$w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0. \quad (2.2.6)$$

Жестко заделанный край:

$$w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0. \quad (2.2.7)$$

Свободный от закреплений край рассмотрим в общем случае:

$$\left. \begin{aligned} m^{(\eta)} = {}^0 m^{(\eta)} &= \frac{M_y^0}{q_0 a^2}; \\ {}^0 v^{(\eta)} &= \frac{v_y^0}{q_0 a} = -\frac{\partial w^{\eta\eta}}{\partial \eta} - (2\gamma - \mu) \frac{\partial w^{\xi\xi}}{\partial \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.8)$$

При $\xi = 0$ для свободного края имеем:

$$\left. \begin{aligned} m^{(\xi)} = {}^0 m^{(\xi)} &= \frac{M_x^0}{q_0 a^2}; \\ {}^0 v^{(\xi)} &= \frac{v_x^0}{q_0 a} = -\frac{\partial w^{\xi\xi}}{\partial \xi} - (2\gamma - \mu) \frac{\partial w^{\eta\eta}}{\partial \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.9)$$

Если пересекающиеся под прямым углом стороны пластинки шарнирно оперты или жестко заделаны, то в угловой точке:

$$w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0. \quad (2.2.10)$$

Если обе стороны плиты в угловой точке свободны от закреплений, то в угловой точке:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = r = 0; \\ r = \frac{R}{q_0 a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.11)$$

Если в угловой точке одна сторона плиты свободна, другая – шарнирно оперта, то справедливо выражение (2.2.10).

Если в угловой точке одна сторона плиты свободна, другая – жестко закреплена, то:

$$w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0; \quad (2.2.12)$$

или:

$$w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0; \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0. \quad (2.2.13)$$

Введем обозначения:

$$w^{\xi\xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}; w^{\xi\eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}; w^{\eta\eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}. \quad (2.2.14)$$

С учетом (2.2.14) из дифференциального уравнения четвертого порядка (2.2.1) получим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно двух неизвестных $w^{\xi\xi}; w^{\eta\eta}$:

$$\alpha \frac{\partial^2 w^{\xi\xi}}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 w^{\xi\xi}}{\partial \eta^2} + \gamma \frac{\partial^2 w^{\eta\eta}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w^{\eta\eta}}{\partial \eta^2} = p. \quad (2.2.15)$$

При учете (2.2.14) формулы (2.2.3); (2.2.4) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} m^{(\xi)} &= -(\alpha w^{\xi\xi} + \mu w^{\eta\eta}); \\ m^{(\eta)} &= -(w^{\eta\eta} + \mu w^{\xi\xi}); \end{aligned} \right\} \quad (2.2.16)$$

$$m^{(\xi\eta)} = \lambda w^{\xi\eta}; \quad (2.2.17)$$

$$\left. \begin{aligned} q^{(\xi)} &= -\frac{\partial}{\partial \xi} (\alpha w^{\xi\xi} + \gamma w^{\eta\eta}); \\ q^{(\eta)} &= -\frac{\partial}{\partial \eta} (w^{\eta\eta} + \gamma w^{\xi\xi}); \end{aligned} \right\} \quad (2.2.18)$$

краевые условия при $\eta = 0$ запишутся так:

Шарнирно опертый край:

$$w = 0; w^{\xi\xi} = w^{\eta\eta} = 0. \quad (2.2.19)$$

Жестко заделанный край:

$$w = 0; w^{\xi\xi} = 0; w^{\eta\eta} = 0. \quad (2.2.20)$$

где $w^\eta = \frac{\partial w}{\partial \eta}$.

Свободный от закреплений край:

$$\left. \begin{aligned} m^{(\eta)} = {}^0 m^{(\eta)} &= \frac{M_y^0}{q_0 a^2}; \\ {}^0 v^{(\eta)} = \frac{v_y^0}{q_0 a} &= -\frac{\partial w^{\eta\eta}}{\partial \eta} - (2\gamma - \mu) \frac{\partial w^{\xi\xi}}{\partial \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.21)$$

При $\xi = 0$ для свободного края имеем:

$$\left. \begin{aligned} m^{(\xi)} = {}^0 m^{(\xi)} &= \frac{M_x^0}{q_0 a^2}; \\ {}^0 v^{(\xi)} = \frac{v_x^0}{q_0 a} &= -\frac{\partial w^{\xi\xi}}{\partial \xi} - (2\gamma - \mu) \frac{\partial w^{\eta\eta}}{\partial \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.22)$$

Вместо (2.2.10); (2.2.12) с учетом введенных новых неизвестных получим соответственно (2.2.19) и (2.2.20).

Условия (2.2.11); (2.2.13) запишутся так:

$$w^{\xi\xi} = w^{\eta\eta} = r = 0; \quad (2.2.23)$$

$$w = 0; w^{\eta\eta} = 0; w^\xi = 0; . \quad (2.2.24)$$

где $w^\xi = \frac{\partial w}{\partial \xi}$.

2.3. Аппроксимация дифференциальных уравнений и краевых условий разностными уравнениями МПА.

В [25] дается разностная аппроксимация дифференциального уравнения второго порядка общего вида:

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial w}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \sigma \frac{\partial w}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \\ & + \sum_{i=1}^n (\alpha_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi^2} + \delta_i \frac{\partial w_i}{\partial \xi} + \beta_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi \partial \eta} + \sigma_i \frac{\partial w_i}{\partial \eta} + \gamma_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \eta^2}) = -p. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Дифференциальное уравнение (2.2.15) является частным случаем (2.3.1). Роль неизвестных $w; w_i$ в (2.2.15) играют подлежащие определению величины $w^{\xi\xi}; w^{\eta\eta}$. Поэтому для оппроксимации (2.2.15) разностным уравнением МПА согласно §2.5 [25] необходимо записать в левой части (2.1.21) работы [25] её линейную комбимацию с заменей: w на $w^{\xi\xi}$ при $\delta = \beta = \sigma = 0$ и w_i на $w^{\eta\eta}$ при $\alpha_i = \gamma; \delta_i = \beta_i = \sigma_i = 0; \gamma_i = 1$, а второй части (2.1.2) [25] p следует заменить на $-p$. В итоге получим разностное уравнение относительно неизвестных $w^{\xi\xi}$ и $w^{\eta\eta}$. Запишем это уравнение на равномерной сетке с шагами h и τ , полагая, что p в пределах элементов I, II, III, IV (рис. 2.2) постоянно, но на границах терпит разрыв I рода.

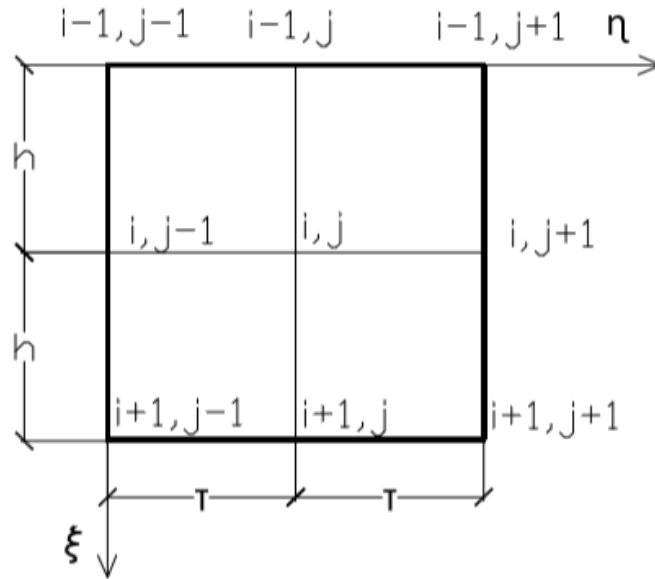


Рис.2.2

При записи разностной аппроксимации дифференциального уравнения (2.2.15) будем полагать также, что функции $w^{\xi\xi}$ и $w^{\eta\eta}$ непрерывны; возможны конечные разрывы частных производных этих функций:

$$\begin{aligned}
& (\alpha \frac{\tau}{h} + \gamma \frac{h}{\tau}) w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha \frac{\tau}{h} - \gamma \frac{h}{\tau}) w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha \frac{\tau}{h} + \gamma \frac{h}{\tau}) w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - \\
& - 2(\alpha \frac{\tau}{h} - 5\gamma \frac{h}{\tau}) w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 20(\alpha \frac{\tau}{h} + \gamma \frac{h}{\tau}) w_{i,j}^{\xi\xi} - 2(\alpha \frac{\tau}{h} - 5\gamma \frac{h}{\tau}) w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\alpha \frac{\tau}{h} + \gamma \frac{h}{\tau}) w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha \frac{\tau}{h} - \gamma \frac{h}{\tau}) w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha \frac{\tau}{h} + \gamma \frac{h}{\tau}) w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} - \\
& - h \left[\gamma \frac{h}{\tau} {}^{I-II} \Delta w_{i,j-1}^{\xi\xi\xi} - (2\alpha \frac{\tau}{h} + \gamma \frac{h}{\tau}) ({}^{I-II} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\xi} + {}^{III-IV} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\xi}) + \gamma \frac{h}{\tau} {}^{III-IV} \Delta w_{i,j+1}^{\xi\xi\xi} \right] - \\
& - \tau \left[\gamma \frac{\tau}{h} {}^{I-III} \Delta w_{i-1,j}^{\xi\xi\eta} - (\alpha \frac{\tau}{h} + 2\gamma \frac{h}{\tau}) ({}^{I-III} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\eta} + {}^{II-IV} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\eta}) + \alpha \frac{\tau}{h} {}^{II-IV} \Delta w_{i+1,j}^{\xi\xi\eta} \right] + \\
& + 4\alpha\tau ({}^{I-II} \Delta w_{i,j-1/2}^{\xi\xi\xi} + {}^{III-IV} \Delta w_{i,j+1/2}^{\xi\xi\xi}) + 4\gamma h ({}^{I-III} \Delta w_{i-1/2,j}^{\xi\xi\eta} + {}^{II-IV} \Delta w_{i+1/2,j}^{\xi\xi\eta}) + \\
& + (\gamma \frac{\tau}{h} + \frac{h}{\tau}) w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma \frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau}) w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma \frac{\tau}{h} + \frac{h}{\tau}) w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - \\
& - (2\gamma \frac{\tau}{h} - 5\frac{h}{\tau}) w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 20(\gamma \frac{\tau}{h} + \frac{h}{\tau}) w_{i,j}^{\eta\eta} - 2(\gamma \frac{\tau}{h} - 5\frac{h}{\tau}) w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + (\gamma \frac{\tau}{h} + \frac{h}{\tau}) w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma \frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau}) w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma \frac{\tau}{h} + \frac{h}{\tau}) w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} - \\
& - h \left[\frac{h}{\tau} {}^{I-II} \Delta w_{i,j-1}^{\eta\eta\xi} - (2\gamma \frac{\tau}{h} + \frac{h}{\tau}) ({}^{I-II} \Delta w_{i,j}^{\eta\eta\xi} + {}^{III-IV} \Delta w_{i,j}^{\eta\eta\xi}) + \frac{h}{\tau} {}^{III-IV} \Delta w_{i,j+1}^{\eta\eta\xi} \right] - \\
& - \tau \left[\gamma \frac{\tau}{h} {}^{I-III} \Delta w_{i-1,j}^{\eta\eta\eta} - (\gamma \frac{\tau}{h} + 2\frac{h}{\tau}) ({}^{I-III} \Delta w_{i,j}^{\eta\eta\eta} + {}^{II-IV} \Delta w_{i,j}^{\eta\eta\eta}) + \gamma \frac{\tau}{h} {}^{II-IV} \Delta w_{i+1,j}^{\eta\eta\eta} \right] + \quad (2.3.2) \\
& + 4\gamma\tau ({}^{I-II} \Delta w_{i,j-1/2}^{\eta\eta\xi} + {}^{III-IV} \Delta w_{i,j+1/2}^{\eta\eta\xi}) + 4\gamma h ({}^{I-III} \Delta w_{i-1/2,j}^{\eta\eta\eta} + {}^{II-IV} \Delta w_{i+1/2,j}^{\eta\eta\eta}) = \\
& = 3\tau h ({}^I p_{ij} + {}^II p_{ij} + {}^III p_{ij} + {}^IV p_{ij}),
\end{aligned}$$

При $\tau = h$ уравнение (2.3.2) упрощается и запишется в виде (2.3.3):

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \gamma) w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma) w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma) w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - \\
& - (2\alpha - 5\gamma) w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 20(\alpha + \gamma) w_{i,j}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma) w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\alpha + \gamma) w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma) w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma) w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\gamma + 1) w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1) w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1) w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - \\
& - 2(\gamma - 5) w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 20(\gamma + 1) w_{i,j}^{\eta\eta} - 2(\gamma - 5) w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \quad (2.3.3) \\
& + (\gamma + 1) w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1) w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1) w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + h \left\{ \frac{\gamma}{\alpha} {}^{I-II} \Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} - 4 {}^{I-II} \Delta q_{i,j-1/2}^{(\xi)} - (2 + \frac{\gamma}{\alpha}) [{}^{I-II} \Delta q_{i,j}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{i,j}^{(\xi)}] - 4 {}^{III-IV} \Delta q_{i,j+1/2}^{(\xi)} + \frac{\gamma}{\alpha} {}^{III-IV} \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right\} + \\
& + h \left\{ \gamma {}^{I-III} \Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} - 4 {}^{I-III} \Delta q_{i-1/2,j}^{(\eta)} - (2 + \gamma) [{}^{I-III} \Delta q_{i,j}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{i+1/2,j}^{(\eta)}] - 4 {}^{II-IV} \Delta q_{i+1/2,j}^{(\eta)} + \gamma {}^{II-IV} \Delta q_{i+1,j}^{(\eta)} \right\} = \\
& = 3h^2 ({}^I p_{ij} + {}^II p_{ij} + {}^III p_{ij} + {}^IV p_{ij}).
\end{aligned}$$

В (2.3.2): ${}^{I-II} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\xi} = {}^I \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\xi} - {}^I \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\xi}$; ${}^{I-III} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\eta} = {}^I \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\eta} - {}^{III} \Delta w_{i,j}^{\xi\xi\eta}$;

$w^{\xi\xi\xi} = \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3}$; $w^{\xi\xi\eta} = \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta}$. Остальные величины подобного вида имеют

аналогичный смысл. Например, ${}^{I-III} \Delta w_{i,j}^{\eta\eta\eta} = {}^I \Delta w_{i,j}^{\eta\eta\eta} - {}^{III} \Delta w_{i,j}^{\eta\eta\eta}$; $w^{\eta\eta\eta} = \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3}$.

Верхний левый индекс означает принадлежность разрывной величины тому или иному элементу. Например, ${}^I p_{ij}$ - принадлежащее I элементу (рис. 2.2) значение p в точке ij , в которой p может претерпевать конечный разрыв. Или

${}^{I-II} \Delta w_{i,j-1}^{\eta\eta\xi} = {}^I \Delta w_{i,j-1}^{\eta\eta\xi} - {}^{II} \Delta w_{i,j-1}^{\eta\eta\xi}$; $w^{\eta\eta\xi} = \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^2 \partial \xi}$; ${}^{II} \Delta w_{i,j-1}^{\eta\eta\xi}$ - значение $w^{\eta\eta\xi}$ в точке $i, j-1$;

принадлежащее элементу II. Величины $\Delta w^{\eta\eta\xi}$ будут отличны от нуля только в том случае, если в плите имеется цилиндрический шарнир, расположенный параллельно оси η .

Будем полагать, что упомянутые выше шарниры отсутствуют. Тогда в (2.3.2) все $\Delta w^{\eta\eta\xi} = 0$; аналогично все $\Delta w^{\xi\xi\eta} = 0$. Если же считать, что имеются полосовые нагрузки, расположенные вдоль осей координат, то из (2.2.18) следует:

$$\Delta w^{\xi\xi\xi} = -\frac{1}{2} \Delta q^{(\xi)}; \Delta w^{\eta\eta\eta} = -\Delta q^{(\eta)}. \quad (2.3.4)$$

В [22] со ссылкой на [25] приводится дополнительное уравнение для определения упомянутых выше $w^{\xi\xi}$, $w^{\eta\eta}$, и алгоритм расчета строится относительно этих двух неизвестных.

Имея в виду, что в динамических задачах одновременно с $w^{\xi\xi}$, $w^{\eta\eta}$ приходится определять на каждом временном слое и w , здесь алгоритм решения статической задачи также построим относительно трёх неизвестных: $w^{\xi\xi}$, $w^{\eta\eta}$ и w . Увеличение числа неизвестных в каждой внутренней точке сетки до трёх на первый взгляд усложняет задачу. Но этот алгоритм открывает путь решения динамической задачи. Кроме того, применяемые нами уравнения, за исключением (2.3.2), будут не сложнее предложенных в [22].

Для определения безразмерных прогибов w воспользуемся уравнением, полученным с использованием результатов [25] на равномерной сетке с шагом h при непрерывных w , w^η и $w^{\eta\eta}$:

$$w_{i,j-1} - 2w_{ij} + w_{i,j+1} = \frac{h^2}{12} (w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 10w_{i,j}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta}) + \frac{h^3}{12} \Delta q_{ij}^{(\eta)}. \quad (2.3.5)$$

Уравнение (2.3.5) можно записать в направлении оси ξ ; для этого достаточно в (2.3.5) η, i, j заменить соответственно на ξ, i, j :

$$w_{i-1,j} - 2w_{ij} + w_{i+1,j} = \frac{h^2}{12} (w_{i-1,j}^{\xi\xi} + 10w_{i,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi}) + \frac{h^3}{12} \Delta q_{ij}^{(\xi)}. \quad (2.3.6)$$

Уравнение (2.3.5) справедливо для всех линий сетки, параллельных оси η (в том числе для свободных от закреплений краев, на которых $w \neq 0$); уравнение (2.3.6) – для линий, параллельных оси ξ .

Если плита шарнирно оперта по всему контуру, поскольку на краях в этом случае $w = w^{\xi\xi} = w^{\eta\eta} = 0$, уравнения (2.3.4), (2.3.5), (2.3.6) образуют замкнутую систему линейных алгебраических уравнений для определения трех неизвестных $w^{\xi\xi}$, $w^{\eta\eta}$ и w во всех внутренних точках сетки. Разумеется, эти уравнения должны быть записаны для всех расчетных точек с учетом краевых условий.

Если хотя бы одна из сторон пластины жестко заделана или свободна от закреплений, упомянутую выше систему уравнений следует решать совместно с уравнениями для краевых точек, которые следуют из разностной аппроксимации краевых условий.

Здесь мы при решении статических задач воспользуемся теми уравнениями для краевых точек, которые получены в [22] для ортотропных пластин с использованием результатов работы [25]. В частности, в случае квадратной сетки для точки ij левого жестко заделанного края прямоугольной плиты справедливо следующее уравнение [22], полученное с учетом (2.2.20):

$$\begin{aligned}
& 7w_{i-1,j}^{\eta\eta} + 6w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - w_{i-1,j+2}^{\eta\eta} + 2w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - w_{i-1,j+2}^{\xi\xi} - \\
& -14w_{i,j}^{\eta\eta} - 12w_{i,j+1}^{\eta\eta} + 2w_{i,j+2}^{\eta\eta} - 28w_{i,j+1}^{\xi\xi} + 2w_{i,j+2}^{\xi\xi} + \\
& 7w_{i+1,j}^{\eta\eta} + 6w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} - w_{i+1,j+2}^{\eta\eta} + 2w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} - w_{i+1,j+2}^{\xi\xi} + \\
& + 2\frac{h}{\alpha} \left[{}^{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} - {}^{III-IV} \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Для точки ij верхнего заделанного края плиты (2.3.7) записывается по аналогии с заменой η, ξ, i, j соответственно на ξ, η, j, i при $\alpha = 1$.

Для точки ij левого ($\eta = 0$) свободного от закреплений края ортотропной пластины справедливо следующее уравнение [22]:

$$\begin{aligned}
& (\alpha - \mu^2) w_{i-1,j}^{\xi\xi} + \\
& + 2 \left[\mu(2 + \mu) - \alpha - 2\gamma \right] w_{ij}^{\xi\xi} + 2(2\gamma - \mu) w_{i,j+1}^{\xi\xi} + 2w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + (\alpha - \mu^2) w_{i+1,j}^{\xi\xi} - h^2 p_{ij} + \\
& + 2h^0 v_{ij}^{(\eta)} - \mu^0 m_{i-1,j}^{(\eta)} + 2(1 + \mu)^0 m_{i,j}^{(\eta)} - \mu^0 m_{i+1,j}^{(\eta)} = 0
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

$$\text{причем: } w_{ij}^{\eta\eta} = -\mu w_{ij}^{\xi\xi} - {}^0 m_{ij}^{(\eta)} \tag{2.3.9}$$

Для точки ij верхнего ($\xi = 0$) свободного края уравнение [22] имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\mu^2}{\alpha} \right) w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 2 \left[\mu \left(2 + \frac{\mu}{\alpha} \right) - 1 - 2\gamma \right] w_{ij}^{\eta\eta} + \left(1 - \frac{\mu^2}{\alpha} \right) w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + 2(2\gamma - \mu) w_{i+1,j}^{\eta\eta} + 2\alpha w_{i+1,j}^{\xi\xi} - h^2 p_{ij} + \\
& + 2h^0 v_{ij}^{(\xi)} - \frac{\mu}{\alpha} {}^0 m_{i,j-1}^{(\xi)} + 2 \left(1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) {}^0 m_{i,j}^{(\xi)} - \frac{\mu}{\alpha} {}^0 m_{i,j+1}^{(\xi)} = 0
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

В расчетных точках свободного края величина $w_{ij}^{\xi\xi}$ при ($\xi = 0$) вычисляется по

$$\text{формуле: } w_{ij}^{\xi\xi} = -\frac{\mu}{\alpha} w_{ij}^{\eta\eta} - \frac{{}^0 m_{ij}^{(\xi)}}{\alpha}. \tag{2.3.11}$$

В уравнениях (2.3.8) – (2.3.11): ${}^0 v^{(\eta)}$, ${}^0 v^{(\xi)}$, ${}^0 m^{(\eta)}$, ${}^0 m^{(\xi)}$ – соответственно заданные (в частности, нулевые) значения обобщенных поперечных сил и изгибающих моментов на свободных от закреплений краях плиты.

При $\alpha = 1, \xi = \eta, \eta = \xi, i = j, j = i$ уравнения (2.3.8) и (2.3.10) совпадают. Для точка ij правого края и соответственно для точки ij нижнего края уравнения

(2.3.7), (2.3.8) и (2.3.10) записываются в «зеркальном отображении» при этом ${}^0\nu^{(\eta)}$ и ${}^0\nu^{(\xi)}$ меняют знак на обратный.

2.4. Составление с алгоритма расчета и программы для ЭВМ.

Для решения алгебраических уравнений используем итерационный метод Зейделя. В этом случае упрощается программа: нет необходимости в составлении матрицы коэффициентов при неизвестных и хранении её в памяти ЭВМ. Уравнения представляются в виде, удовлетворяющем необходимому условию сходимости итерационного процесса, т.е. так, чтобы коэффициенты при неизвестных в правой части уравнений, формально разрешенных относительно неизвестного в точке ij сетки, не превышали по абсолютному значению единицы.

Запишем уравнения (2.3.5) и (2.3.6) в следующем виде:

$$\bar{w}_{i,j-1} - 2\bar{w}_{ij} + \bar{w}_{i,j+1} = w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 10w_{i,j}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta} + h\Delta q_{ij}^{\eta}; \quad (2.4.1)$$

$$\bar{w}_{i-1,j} - 2\bar{w}_{ij} + \bar{w}_{i+1,j} = w_{i-1,j}^{\xi\xi} + 10w_{i,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi} + h\Delta q_{ij}^{\xi}; \quad (2.4.2)$$

$$\text{где } \bar{w} = \frac{12}{h^2} w. \quad (2.4.3)$$

Вычитая (2.4.1) из (2.4.2), исключим \bar{w}_{ij} :

$$\begin{aligned} & \bar{w}_{ij} - \\ & -\bar{w}_{i,j-1} - \bar{w}_{i,j+1} + \\ & +\bar{w}_{i+1,j} - \\ & -w_{i-1,j}^{\xi\xi} + \\ & +w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 10w_{ij}^{\xi\xi} + 10w_{ij}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta} - \\ & -w_{i+1,j}^{\xi\xi} = h \left[\Delta q_{ij}^{(\xi)} - \Delta q_{ij}^{(\eta)} \right]. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Далее запишем (2.4.4), умножая соответственно на $2(\gamma+1)$ и на $-2(\alpha+\gamma)$, в следующем виде:

$$\begin{aligned} & -2(\gamma+1)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + \\ & +2(\gamma+1)w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 20(\gamma+1)(w_{ij}^{\eta\eta} - w_{ij}^{\xi\xi}) + 2(\gamma+1)w_{i,j+1}^{\eta\eta} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(\gamma+1)w_{i+1,j}^{\xi\xi} + \\
& -2(\gamma+1)(\bar{w}_{i-1,j} - \bar{w}_{i,j-1} - \bar{w}_{i,j+1} + \bar{w}_{i+1,j}) = \\
& = h(\gamma+1)\left[\Delta^{I-II}q_{ij}^{(\xi)} + \Delta^{III-IV}q_{ij}^{(\xi)} - {}^{I-III}\Delta q_{ij}^{(\eta)} - {}^{II-IV}\Delta q_{ij}^{(\eta)}\right]; \tag{2.4.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(\alpha+\gamma)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + \\
& -2(\alpha+\gamma)w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 20(\alpha+\gamma)(w_{ij}^{\xi\xi} - w_{ij}^{\eta\eta}) - 2(\alpha+\gamma)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + 2(\alpha+\gamma)w_{i+1,j}^{\xi\xi} - \\
& -2(\alpha+\gamma)(\bar{w}_{i-1,j} - \bar{w}_{i,j-1} - \bar{w}_{i,j+1} + \bar{w}_{i+1,j}) = \\
& = h(\alpha+\gamma)\left[\Delta^{I-II}q_{ij}^{(\xi)} + \Delta^{III-IV}q_{ij}^{(\xi)} - {}^{I-III}\Delta q_{ij}^{(\eta)} - {}^{II-IV}\Delta q_{ij}^{(\eta)}\right]. \tag{2.4.6}
\end{aligned}$$

При записи (2.4.5) и (2.4.6) принято:

$$\Delta q_{ij}^{(\xi)} = \frac{1}{2}\left[{}^{I-II}\Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV}\Delta q_{ij}^{(\xi)}\right]; \Delta q_{ij}^{(\eta)} = \frac{1}{2}\left[{}^{I-III}\Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV}\Delta q_{ij}^{(\eta)}\right]. \tag{2.4.7}$$

Уравнение (2.3.4) суммируем отдельно с (2.4.5) и (2.4.6):

$$\begin{aligned}
& (\alpha+\gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha-2\gamma-1)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha+\gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - \\
& -2(\alpha-5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 20(\alpha+2\gamma+1)w_{i,j}^{\xi\xi} - 2(\alpha-5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\alpha+\gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha-2\gamma-1)w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha+\gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\gamma+1)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\alpha-1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma+1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + 12w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 12w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + (\gamma+1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\alpha-1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma+1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + 2(\gamma+1)(\bar{w}_{i-1,j} - \bar{w}_{i,j-1} - \bar{w}_{i,j+1} + \bar{w}_{i+1,j}) + \\
& + h\left\{\frac{\gamma}{\alpha}{}^{I-II}\Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} - 4{}^{I-II}\Delta q_{i,j-1/2}^{(\xi)} - \left(3 + \frac{\gamma}{\alpha} + \gamma\right)\left[{}^{I-II}\Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV}\Delta q_{ij}^{(\xi)}\right] - 4{}^{III-IV}\Delta q_{i,j+1/2}^{(\xi)} + \frac{\gamma}{\alpha}{}^{III-IV}\Delta q_{i,j+1}^{(\xi)}\right\} + \\
& + h\left\{\gamma{}^{I-III}\Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} - 4{}^{I-III}\Delta q_{i-1/2,j}^{(\eta)} - {}^{I-III}\Delta q_{ij}^{(\eta)} - {}^{II-IV}\Delta q_{ij}^{(\eta)} - 4{}^{II-IV}\Delta q_{i+1/2,j}^{(\eta)} + \gamma{}^{II-IV}\Delta q_{i+1,j}^{(\eta)}\right\} = \\
& = 3h^2({}^I p_{ij} + {}^II p_{ij} + {}^III p_{ij} + {}^IV p_{ij}); \tag{2.4.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 12\alpha w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - \\
& - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 12\alpha w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\alpha - 1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - \\
& + 2(2\gamma + \alpha - 5)w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 20(2\gamma + \alpha + 1)w_{ij}^{\eta\eta} - 2(2\gamma + \alpha - 5)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\alpha - 1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} - \\
& - 2(\alpha + \gamma)(\bar{w}_{i-1,j} - \bar{w}_{i,j-1} - \bar{w}_{i,j+1} + \bar{w}_{i+1,j}) + \\
& + h \left\{ \frac{\gamma}{\alpha} {}^{I-II} \Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} - 4 {}^{I-II} \Delta q_{i,j-1/2}^{(\xi)} + \left(\alpha + \gamma - \frac{\gamma}{\alpha} - 2 \right) \left[{}^{I-II} \Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} \right] - 4 {}^{III-IV} \Delta q_{i,j+1/2}^{(\xi)} + \frac{\gamma}{\alpha} {}^{III-IV} \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right\} + \\
& + h \left\{ \gamma {}^{I-III} \Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} - 4 {}^{I-III} \Delta q_{i-1/2,j}^{(\eta)} - (2 + 2\gamma + \alpha) \left[{}^{I-III} \Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{ij}^{(\eta)} \right] - 4 {}^{II-IV} \Delta q_{i+1/2,j}^{(\eta)} + \gamma {}^{II-IV} \Delta q_{i+1,j}^{(\eta)} \right\} = \\
& = 3h^2 ({}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} + {}^{III} p_{ij} + {}^{IV} p_{ij});
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

При $\alpha = 1; \xi = \eta; \eta = \xi; i = j; j = i$ коэффициенты при $w^{\xi\xi}, w^{\eta\eta}$ в (2.4.8) и (2.4.9)

совпадают.

Далее суммируем уравнения (2.4.2), (2.4.1) с учетом (2.4.7):

$$\begin{aligned}
& \bar{w}_{i-1,j} + \\
& + \bar{w}_{i,j-1} - 4\bar{w}_{i,j} + \bar{w}_{i,j+1} + \\
& + \bar{w}_{i+1,j} = \\
& = w_{i-1,j}^{\xi\xi} + \\
& + w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 10(w_{ij}^{\xi\xi} + w_{ij}^{\eta\eta}) + w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + w_{i+1,j}^{\xi\xi} + . \\
& + \frac{h}{2} \left[{}^{I-II} \Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{I-III} \Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{ij}^{(\eta)} \right].
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Решая (2.4.8), (2.4.9) формально относительно $w_{ij}^{\xi\xi}, w_{ij}^{\eta\eta}$ и преобразуя (2.4.10), получим выражения для итерационного решения этих уравнений с непревышающими единицы коэффициентами при неизвестных в правой части:

$$\begin{aligned}
w_{ij}^{\xi\xi} = & \{(\alpha + \gamma)(w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} + w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + w_{i+1,j+1}^{\xi\xi}) + \\
& + 2(5\alpha - 2\gamma - 1)(w_{i-1,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi}) + 2(\bar{\alpha} + 5\gamma)(w_{i,j-1}^{\xi\xi} + w_{i,j+1}^{\xi\xi}) + \\
& + (1 + \alpha)(w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} + w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + w_{i+1,j+1}^{\eta\eta}) + \\
& + 2(5\alpha - 1)(w_{i-1,j}^{\eta\eta} + w_{i+1,j}^{\eta\eta}) + 12(w_{i,j-1}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta}) + \\
& + 5(1 + \gamma)(\tilde{w}_{i-1,j} - \tilde{w}_{i,j-1} - \tilde{w}_{i,j+1} + \tilde{w}_{i+1,j}) + \\
& + h \frac{\gamma}{\alpha} \left[{}^{I-II} \Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right] - 4h \left[{}^{I-II} \Delta q_{i,j-1/2}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{i,j+1/2}^{(\xi)} \right] - h \left(3 + \gamma \frac{1 + \alpha}{\alpha} \right) \left[{}^{I-II} \Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} \right] + \\
& + h\gamma \left[{}^{I-III} \Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{i+1,j}^{(\eta)} \right] - 4h \left[{}^{I-III} \Delta q_{i-1/2,j}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{i+1/2,j}^{(\eta)} \right] - h \left[{}^{I-III} \Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{ij}^{(\eta)} \right] - \\
& - 3h^2 ({}^I p_{ij} + {}^II p_{ij} + {}^III p_{ij} + {}^IV p_{ij}) \} / 20\bar{\alpha};
\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

$$\begin{aligned}
w_{ij}^{\eta\eta} = & \{(\alpha + \gamma)(w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} + w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + w_{i+1,j+1}^{\xi\xi}) + \\
& + 12\alpha(w_{i-1,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi}) + 2(5\gamma - \alpha)(w_{i,j-1}^{\xi\xi} + w_{i,j+1}^{\xi\xi}) + \\
& + (1 + \alpha)(w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} + w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + w_{i+1,j+1}^{\eta\eta}) + \\
& + 2(5\gamma - 1)(w_{i-1,j}^{\eta\eta} + w_{i+1,j}^{\eta\eta}) + 2(5 - \alpha - 2\gamma)(w_{i,j-1}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta}) - \\
& - 5(\alpha + \gamma)(\tilde{w}_{i-1,j} - \tilde{w}_{i,j-1} - \tilde{w}_{i,j+1} + \tilde{w}_{i+1,j}) + \\
& + h \frac{\gamma}{\alpha} \left[{}^{I-II} \Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right] - 4h \left[{}^{I-II} \Delta q_{i,j-1/2}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{i,j+1/2}^{(\xi)} \right] - h \left(\alpha + \gamma \frac{\alpha - 1}{\alpha} - 2 \right) \left[{}^{I-II} \Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} \right] + \\
& + h\gamma \left[{}^{I-III} \Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{i+1,j}^{(\eta)} \right] - 4h \left[{}^{I-III} \Delta q_{i-1/2,j}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{i+1/2,j}^{(\eta)} \right] - h(2 + 2\gamma + \alpha) \left[{}^{I-III} \Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{ij}^{(\eta)} \right] - \\
& - 3h^2 ({}^I p_{ij} + {}^II p_{ij} + {}^III p_{ij} + {}^IV p_{ij}) \} / 20\bar{\alpha};
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

где $\bar{\alpha} = 1 + \alpha + 2\gamma$;

$$\begin{aligned}
w_{ij} = & 0,25(w_{i-1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} + w_{i+1,j}) - \\
& - 0,1(w_{i-1,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi} + w_{i,j-1}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta}) - w_{ij}^{\xi\xi} - w_{ij}^{\eta\eta} - \\
& - 0,05h \left[{}^{I-II} \Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{I-III} \Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{ij}^{(\eta)} \right];
\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

$$\text{В этих уравнениях } w = \frac{\bar{w}}{2,5} = \frac{24}{5} \frac{w}{h^2}. \tag{2.4.14}$$

Уравнения, описывающие краевые условия, также можно представить в виде подготовленном для итерационного решения задачи.

Из (2.3.7) для точки ij левого жестко заделанного края плиты имеем:

$$\begin{aligned}
 w_{ij}^{\eta\eta} = & \left\{ 7w_{i-1,j}^{\eta\eta} + 6w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - w_{i-1,j+2}^{\eta\eta} + 2w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - w_{i-1,j+2}^{\xi\xi} - \right. \\
 & -14w_{i,j}^{\eta\eta} - 12w_{i,j+1}^{\eta\eta} + 2w_{i,j+2}^{\eta\eta} - 28w_{i,j+1}^{\xi\xi} + 2w_{i,j+2}^{\xi\xi} + \\
 & 7w_{i+1,j}^{\eta\eta} + 6w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} - w_{i+1,j+2}^{\eta\eta} + 2w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} - w_{i+1,j+2}^{\xi\xi} + \\
 & \left. + 2\frac{h}{\alpha} \left[{}^{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} - {}^{III-IV} \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right] \right\} / 28.
 \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Для точки ij верхнего заделанного края плиты (2.4.15) записывается с заменой η, ξ, i, j соответственно на ξ, η, j, i . Для правого и нижнего жестко заделанных краев прямоугольной плиты эти уравнения записывается в «зеркальном отображении».

Уравнение (2.3.8) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 w_{ij}^{\xi\xi} = & \left\{ (\alpha - \mu^2) (w_{i-1,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi}) + 2h^0 v_{ij}^{(\eta)} - \right. \\
 & - \mu \left[{}^0 m_{i-1,j}^{(\eta)} + {}^0 m_{i+1,j}^{(\eta)} \right] + 2(1 + \mu) {}^0 m_{i,j}^{(\eta)} + \\
 & \left. + 2(2\gamma - \mu) w_{i,j+1}^{\xi\xi} + 2w_{i,j+1}^{\eta\eta} - h^2 p_{ij} \right\} / 2 \left[\alpha + 2\gamma - \mu(2 + \mu) \right].
 \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Это уравнение для точки ij левого свободного от закреплений края ортотропной плиты. Для правого края оно записывается в «зеркальном отображении».

Для точки ij верхнего свободного края плиты из (2.3.10) следует:

$$\begin{aligned}
 w_{ij}^{\eta\eta} = & \left\{ \left(1 - \frac{\mu^2}{\alpha} \right) w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 2(2\gamma - \mu) w_{i+1,j}^{\eta\eta} + \left(1 - \frac{\mu^2}{\alpha} \right) w_{i,j+1}^{\eta\eta} + 2h^0 v_{ij}^{(\xi)} - \right. \\
 & - \frac{\mu}{\alpha} \left({}^0 m_{i,j-1}^{(\xi)} + {}^0 m_{i,j+1}^{(\xi)} \right) + 2 \left(1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) {}^0 m_{i,j}^{(\xi)} + \\
 & \left. + 2\alpha w_{i+1,j}^{\xi\xi} - h^2 p_{ij} \right\} / 2 \left[1 + 2\gamma - \mu \left(2 + \frac{\mu}{\alpha} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

Для точки ij нижнего свободного края уравнения (2.4.17) записывается в «зеркальном отображении».

Как отмечено выше, в этих формулах: ${}^0v^{(\eta)}$, ${}^0v^{(\xi)}$, ${}^0m^{(\eta)}$, ${}^0m^{(\xi)}$ - заданные на свободных краях плиты значения обобщенных поперечных сил и изгибающих моментов, в частности, равные нулю.

Прогиб в точке ij верхнего и нижнего свободных краев плиты определяются по (2.4.1). Запишем это уравнение с учетом (2.4.13) в следующем виде (при $\Delta q^{(\eta)} = 0$):

$$w_{ij} = 0,25(w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) + 0,5w_{ij}^{\xi\xi} - 0,1(w_{i,j-1}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta}) - w_{ij}^{\eta\eta}. \quad (2.4.18)$$

Уравнение для определения w_{ij} на левом и правом свободных от закреплений краях плиты следует из (2.4.18) с заменой η, i, j соответственно на ξ, j, i .

Если плита шарнирно оперта по всему контуру, поскольку на краях в этом случае $w = w^{\xi\xi} = w^{\eta\eta} = 0$, при составлении системы алгебраических уравнений следует пользоваться лишь уравнениями (2.4.11), (2.4.12), (2.4.13), указывая ЭВМ последовательный переход от одной расчетной точки и другой. Итерационный процесс продолжается до исчерпания наперед заданной точности.

При прочих краевых условиях в итерационный процесс вовлекаются записанные для краевых точек уравнения (2.4.15), (2.4.18). Использование того или другого уравнения из них зависит от заданных условий на краях плиты.

Безразмерные изгибающие моменты $m^{(\xi)}, m^{(\eta)}$ с учетом вычисленных значений $m^{(\xi\xi)}, m^{(\eta\eta)}$ и заданных α, μ подсчитываем по формулам (2.2.16).

Для определения крутящих моментов по найденным значениям w предварительно находим w^{ξ}, w^{η} . Для краевых точек при $\eta = 0$ используем формулу:

$$w_{ij}^{\eta} = \frac{1}{2h} (-3w_{ij} + 4w_{i,j+1} - w_{i,j+2}). \quad (2.4.19)$$

Для точек правого края (2.4.19) записывается в «зеркальном отображении». При этом w^η меняет знак.

К регулярным точкам сетки применяется формула центральных разностей:

$$w_{ij}^\eta = \frac{1}{2h}(-w_{i,j-1} + w_{i,j+1}). \quad (2.4.20)$$

Для определения w_{ij}^ξ формулы (2.4.19), (2.4.20) записываются с заменой η, i, j соответственно на ξ, j, i .

$$\text{Тогда } w_{ij}^{\xi\eta} = \frac{1}{2h}(-w_{i-1,j}^\eta + w_{i+1,j}^\eta). \quad (2.4.21)$$

$$\text{Формула } w_{ij}^{\xi\xi} = \frac{1}{2h}(-w_{i,j-1}^\xi + w_{i,j+1}^\xi). \quad (2.4.22)$$

может быть использована для предварительных вычислений. После определения $w_{ij}^{\xi\eta}$ безразмерный крутящий момент $m_{ij}^{\xi\eta}$ можно найти по формуле (2.2.17).

Поскольку значения $w^\eta, w^\xi, w^{\xi\eta}$ необходимы проектировщику в крайне редких случаях, вычисление этих величин можно не включать в программу, а определить их лишь в представляющих интерес узлах сетки по найденным на ЭВМ значениям w .

Величину $q^{(\xi)}$ в точке ij верхнего края плиты в общем случае можно вычислить после определения $w^{\xi\xi}, w^{\eta\eta}$ по формуле [117]:

$$\begin{aligned} q_{ij}^{(\xi)} = & -\frac{1}{2h} w_{i,j-1}^{\eta\eta} + \frac{1+\gamma}{h} w_{ij}^{\eta\eta} - \frac{1}{2h} w_{i,j+1}^{\eta\eta} - \\ & -\frac{\gamma}{h} w_{i+1,j}^{\eta\eta} - \\ & -\frac{\gamma}{2h} w_{i,j-1}^{\xi\xi} + \frac{\alpha+\gamma}{h} w_{ij}^{\xi\xi} - \frac{\gamma}{2h} w_{i,j+1}^{\xi\xi} - \end{aligned}$$

$$-\frac{\alpha}{h} w_{i+1,j}^{\xi\xi} + \frac{h}{2} p_{ij}. \quad (2.4.23)$$

При учете (2.3.11) из (2.4.23) как частный случай следует формула для $q_{ij}^{(\xi)}$, справедливая для верхнего свободного от закреплений края плиты:

$$\begin{aligned} q_{ij}^{(\xi)} = & -\frac{1}{2h} \left(\mu \frac{\gamma}{\alpha} - 1 \right) w_{i,j-1}^{\eta\eta} + \frac{1}{h} \left[1 + \gamma - \mu \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \right] w_{ij}^{\eta\eta} + \frac{1}{2h} \left(\mu \frac{\gamma}{\alpha} - 1 \right) w_{i,j+1}^{\eta\eta} - \\ & - \frac{\gamma}{h} w_{i+1,j}^{\eta\eta} - \\ & - \frac{\alpha}{h} w_{i+1,j}^{\xi\xi} + \frac{h}{2} p_{ij} + \\ & + \frac{1}{2h} \left[\frac{\gamma}{\alpha} {}^0 m_{i,j-1}^{(\xi)} + 2 \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha} \right) {}^0 m_{ij}^{(\xi)} + \frac{\gamma}{\alpha} {}^0 m_{i,j+1}^{(\xi)} \right]. \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

Формулу для $q^{(\eta)}$ в точке ij левого края плиты получим из (2.4.23) при $\alpha=1$ и замене ξ, η, j, i соответственно на η, ξ, i, j . Для нижнего и правого краев эти формулы записываются в «зеркальном отображении»; при этом $q^{(\xi)}, q^{(\eta)}$ меняют знак на обратный.

2.5. Решение тестовых задач по разработанной методике.

В качестве первой тестовой задачи рассмотрим расчет квадратной шарнирно опертой по контуру изотропной плиты, загруженной в пределах своей четверти равномерно распределенной безразмерной нагрузкой $p=1$ (рис. 2.3).

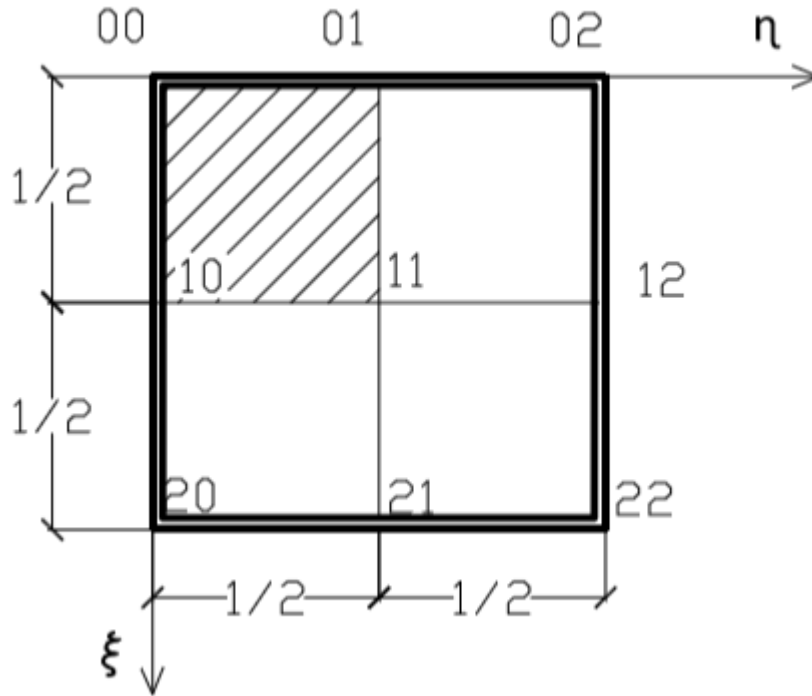


Рис. 2.3

Для перехода к расчету изотропной плиты достаточно в уравнениях пункта 2.4 положить $\alpha = \gamma = 1$ поскольку при этих значениях α, γ из (2.2.1) как частный случай следует разрешающее дифференциальное уравнение изотропной плиты, записанное в безразмерном виде. В частности, из (2.4.8) и (2.4.9) получим соответственно:

$$\begin{aligned}
 & w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2w_{i-1,j}^{\xi\xi} + w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} + \\
 & + 4w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 40w_{i,j}^{\xi\xi} + 4w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
 & + w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2w_{i+1,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + \\
 & + w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 4w_{i-1,j}^{\eta\eta} + w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} + \\
 & + 6w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 6w_{i,j+1}^{\eta\eta} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 4w_{i+1,j}^{\eta\eta} + w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& +2(\bar{w}_{i-1,j} - \bar{w}_{i,j-1} - \bar{w}_{i,j+1} + \bar{w}_{i+1,j}) + \\
& +\frac{h}{2}\left\{ {}^{I-II}\Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} - 4{}^{I-II}\Delta q_{i,j-1/2}^{(\xi)} - 5\left[{}^{I-II}\Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV}\Delta q_{ij}^{(\xi)} \right] - 4{}^{III-IV}\Delta q_{i,j+1/2}^{(\xi)} + {}^{III-IV}\Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right\} + \\
& +\frac{h}{2}\left\{ {}^{I-III}\Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} - 4{}^{I-III}\Delta q_{i-1/2,j}^{(\eta)} - {}^{I-III}\Delta q_{ij}^{(\eta)} - {}^{II-IV}\Delta q_{ij}^{(\eta)} - 4{}^{II-IV}\Delta q_{i+1/2,j}^{(\eta)} + {}^{II-IV}\Delta q_{i+1,j}^{(\eta)} \right\} = \\
& =\frac{3}{2}h^2({}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} + {}^{III} p_{ij} + {}^{IV} p_{ij});
\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

$$\begin{aligned}
& w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 6w_{i-1,j}^{\xi\xi} + w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} + \\
& +4w_{i,j-1}^{\xi\xi} + 4w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& +w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 6w_{i+1,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + \\
& +w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 4w_{i-1,j}^{\eta\eta} + w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - \\
& +2w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 40w_{ij}^{\eta\eta} + 2w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& +w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 4w_{i+1,j}^{\eta\eta} + w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} - \\
& -2(\bar{w}_{i-1,j} - \bar{w}_{i,j-1} - \bar{w}_{i,j+1} + \bar{w}_{i+1,j}) - \\
& +\frac{h}{2}\left[{}^{I-II}\Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} - 4{}^{I-II}\Delta q_{i,j-1/2}^{(\xi)} - {}^{I-II}\Delta q_{ij}^{(\xi)} - {}^{III-IV}\Delta q_{ij}^{(\xi)} - 4{}^{III-IV}\Delta q_{i,j+1/2}^{(\xi)} + {}^{III-IV}\Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right] + \\
& +\frac{h}{2}\left\{ {}^{I-III}\Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} - 4{}^{I-III}\Delta q_{i-1/2,j}^{(\eta)} - 5\left[{}^{I-III}\Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV}\Delta q_{ij}^{(\eta)} \right] - 4{}^{II-IV}\Delta q_{i+1/2,j}^{(\eta)} + {}^{II-IV}\Delta q_{i+1,j}^{(\eta)} \right\} = \\
& =\frac{3}{2}h^2({}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} + {}^{III} p_{ij} + {}^{IV} p_{ij}).
\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Далее запишем (2.5.1), (2.5.2) для точки 11 показанной на рис. 2.3 сетки с шагом $h = \frac{1}{2}$. При этом учтем, что во всех краевых точках, включая угловые,

$$\bar{w} = w_{11}^{\xi\xi} = w_{11}^{\eta\eta} = 0; \quad {}^{II} p_{11} = {}^{III} p_{11} = {}^{IV} p_{11} = 0; \quad {}^I p_{11} = 1; \quad \Delta q^{(\xi)} = \Delta q^{(\eta)} = 0;$$

$$-40w_{11}^{\xi\xi} = \frac{3}{2} \frac{1}{2^2} 1; \quad -40w_{11}^{\eta\eta} = \frac{3}{2} \frac{1}{2^2} 1.$$

Из решения этих уравнений следует:

$$w_{11}^{\xi\xi} = w_{11}^{\eta\eta} = \frac{-3}{4.80}.$$

Для определения \bar{w}_{11} записываем для т.11 уравнение (2.4.10) с учетом краевых условий и найденных значений $w_{11}^{\xi\xi}, w_{11}^{\eta\eta}$ при $\Delta q^{(\xi)} = \Delta q^{(\eta)} = 0$;

$$-4\bar{w}_{11} = -10.2 \cdot \frac{3}{4.80}; \text{ отсюда находим: } \bar{w}_{11} = \frac{3}{4.16}.$$

При загрузке всей площади плиты той же нагрузкой получим:

$$\bar{w}_{11} = \frac{3}{16}; w_{11}^{\xi\xi} = w_{11}^{\eta\eta} = -\frac{3}{80}.$$

По формуле (2.4.3) находим безразмерное значение прогиба в центре плиты:

$$w_{11} = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{12} = 0,00391.$$

По (2.3.3) при $\mu = \nu$, где коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; получим

$$m_{11}^{\xi} = m_{11}^{\eta} = \frac{3}{80}(1+0,3) = 0,0488. \text{ Из решения в рядах [78]: } w_{11} = 0,00406.; m_{11}^{\xi} = m_{11}^{\eta} = 0,0479.$$

Погрешность нашего численного решения в сравнении с [78] составляет по прогибам – 3,7 %; по изгибающим моментам 1,9%.

Вторая тестовая задача. Изображенную на рис. 2.3 плиту считаем ортотропной.

Для определения $w_{11}^{\xi\xi}, w_{11}^{\eta\eta}$ записываем уравнения (2.4.8), (2.4.9) в т. 11 с учетом указанных выше краевых условий, параметров $p, \Delta q^{(\xi)}, \Delta q^{(\eta)}, h$:

$$-20(\alpha + 2\gamma + 1)w_{11}^{\eta\eta} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1;$$

$$-20(\alpha + 2\gamma + 1)w_{11}^{\xi\xi} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.$$

$$\text{Решения этих уравнений получим: } w_{11}^{\eta\eta} = w_{11}^{\xi\xi} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{20(\alpha + 2\gamma + 1)}.$$

$$\text{При загрузке всей плиты той же нагрузкой: } w_{11}^{\eta\eta} = w_{11}^{\xi\xi} = -\frac{0,15}{(\alpha + 2\gamma + 1)}.$$

Полученные результаты совпадают с численным решением этой задачи в [116]. Эти результаты в [116] сопоставлялись при конкретных значениях α, γ, μ (при вычислении изгибающих моментов) с решениями, полученными в [78].

Сравнение результатов выявило высокую точность решения по разработанной здесь и в [78] методике. Отличие нашего решения, полученного на грубой сетке рис. 2.3 по наибольшим изгибающим моментам от результатов работы [116] составляет 2,6%. Решение В. А. Смирнова в [116] получено на сетке 8x8 методом фиктивных нагрузок.

Совпадение наших результатов с результатами [116] при решении задачи по рис. 2.3., объясняется тем, что коэффициенты при $w_{ij}^{\xi\xi}, w_{ij}^{\eta\eta}$ в уравнениях (2.4.8), (2.4.9) и в соответствующих уравнениях [116] одинаковы. Коэффициенты при неизвестных с другими индексами отличаются. Но при записи уравнений (2.4.8) и (2.4.9) для т. 11 рис. 2.3 эти неизвестные являются контурными и равны нулю. Поэтому в таблице 2.1 дается сравнение нашего решения с результатами [78], полученным на ЭВМ при значениях $\alpha = 0,4823; \gamma = 0,6944; \mu = 0,2083$.

В таблице 2.1а приведено решение этой же задачи для пластины, выполненной из фанеры, при значениях: $a=200\text{см}; \delta=8\text{см}; q_0 = 8\text{т/м}^2; D_x=55,89\text{ тм}; D_y=17692\text{ тм}; H=11,65\text{ тм}$.

Таблица 2.1а

		n			
метод	результаты	2	4	8	16
МПА	m^{ξ}	0,08964	0,09175	0,09193	0,09198
	m^{η}	0,03103	0,02967	0,02956	0,02955
	w	0,002883	0,002993	0,003001	0,003001

МКЭ	m^{ξ}	0,1369	0,1037	0,09500	0,09281
	m^{η}	0,03937	0,003219	0,03031	0,02969
	w	0,003916	0,003235	0,003052	0,003006

По МПА: при $n=2$ $w = 0,002883$; при $n=16$ $w = 0,003001$ разница 3,93%.

По МКР: при $n=2$ $w = 0,003916$; при $n=16$ $w = 0,003006$ разница 30,27%.

Значения m^{ξ}, m^{η}, w в таблице 2.1 относятся к центру ортотропной плиты рис. 2.3, загруженной по всей площади равномерно распределенной нагрузкой $p=1$, n – число разбиений стороны плиты. В каждой клетке таблицы 2.1 даются сверху наши результаты, снизу – [116].

Таблица 2.1

n	2	4	8	16
m^{ξ}	0,03608	0,03487	0,03479	0,03478
	0,03608	0,03487	0,03479	0,03478
m^{η}	0,06313	0,06269	0,06268	0,06268
	0,06312	0,06269	0,06268	0,06268
w	0,005442	0,005636	0,005650	0,005651
	0,005442	0,005636	0,005650	0,005651

Таблица 2.1 иллюстрирует быструю сходимость численного решения по разработанному нами алгоритму и практическое совпадение наших результатов с результатами работы [116].

В качестве других тестовых задач ниже мы используем задачи по расчету ортотропных плит на статические нагрузки, решенные в [116]. В этой работе выполнено численное исследование сходимости решений, кроме того проведена проверка интегрального условия равновесия всей плиты: показано, что сумма

интегралов поперечных сил по контуру плиты равна равнодействующей внешней нагрузки. Это проверка является существенной и подтверждает высокую точность полученных в [116] результатов.

Третья тестовая задача. Ортотропная прямоугольная пластина, жестко заделанная по контуру, загружена по всей площади равномерно распределенной нагрузкой $p=1$ (рис 2.4).

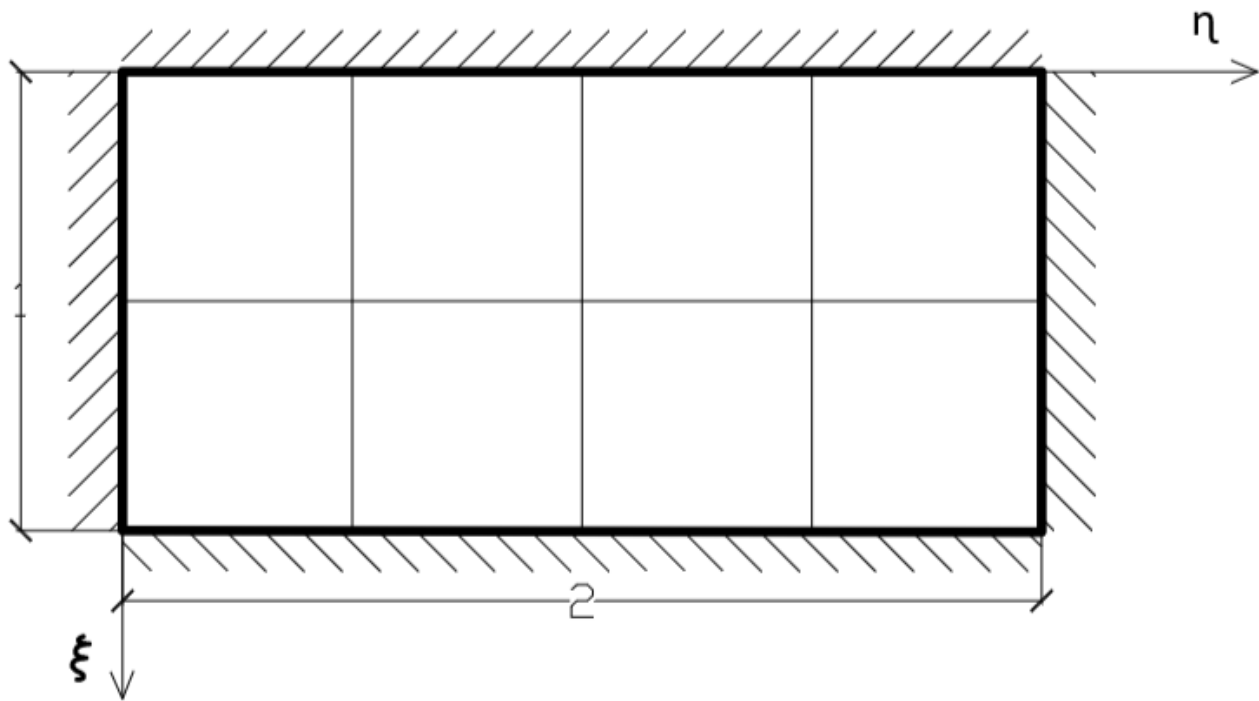


рис 2.4

В таблице 2.2 даются значения w_{max} в центре плиты, полученные при приведенных выше значениях α, γ , n – число разбиений меньшей стороны. Верхние значения в таблице получены по нашему алгоритму, нижние – по [116]. В работе [116] показано также, что значение $w_{max} = 0,004889$ отличается от решения [78], полученного энергетическим методом, на 5,6%. Следует иметь в виду, что решение [78] неточно и может служить лишь приближенной оценкой полученных в [116] и здесь результатов.

Таблица 2.2

n	4	8	16
w_{max}	0,004770	0,004861	0,004885
	0,004577	0,004861	0,004889

Четвертая задача: прямоугольная ортотропная пластина загружена полосовой нагрузкой, две стороны плиты жестко заделаны, две другие шарнирно оперты (рис. 2.5).

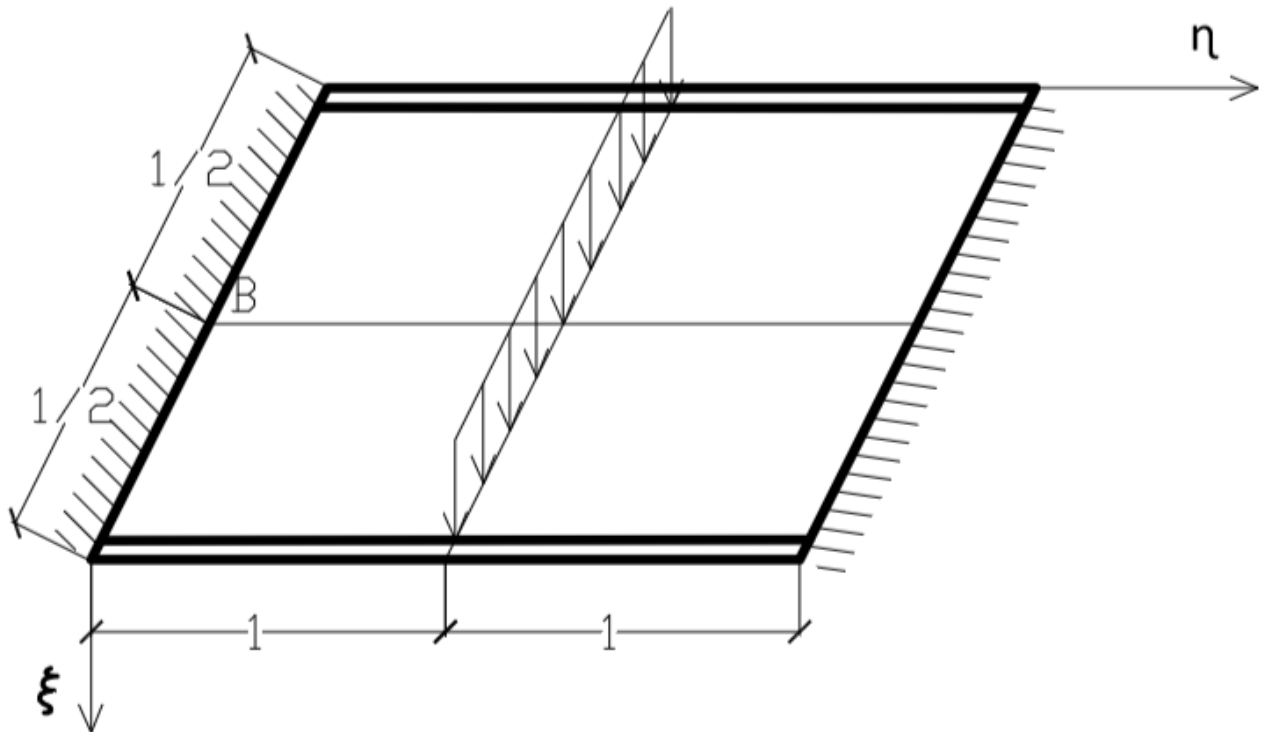


Рис. 2.5

В таблице 2.3 даются величины m^{ξ}, m^{η}, w в характерных точках плиты А и В (рис. 2.5) полученные по нашему алгоритму (верхние значения и по [116] –

нижние значения), n – число разбиений большей стороны пластины. Результаты получены при указанных выше величинах α, γ, μ .

Таблица 2.3

n	4	8	16
m_A^ξ	0,0841	0,0851	0,0854
	0,0862	0,0856	0,0855
m_A^η	0,1436	0,1459	0,01464
	0,1403	0,1451	0,01462
w_A	0,01351	0,01386	0,01395
	0,01454	0,01413	0,01402
m_B^η	-0,0840	-0,0866	-0,0872
	-0,0862	-0,0871	-0,0873

Пятая задача: квадратная ортотропная плита загружена по оси симметрии полосовой нагрузкой, одна сторона пластины свободна от закреплений, три другие шарнирно оперты (рис. 2.6).

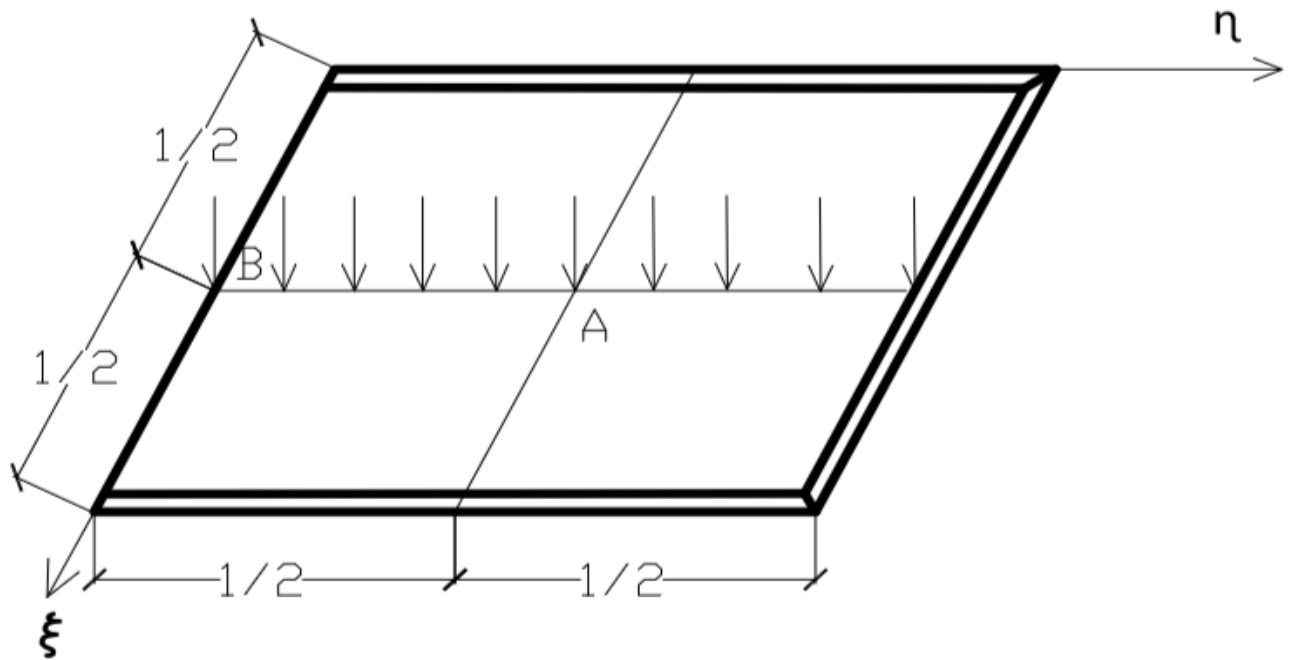


рис. 2.6

В таблице 2.4 даются результаты расчетов на ЭВМ, полученные по разработанному нами алгоритму и по [116] с учетом указанных выше величин α, γ, μ .

Таблица 2.4

n	4	8	16
m_A^ξ	0,1860	0,1891	0,1906
	0,1857	0,1889	0,1905
m_A^η	0,0580	0,0574	0,0571
	0,0582	0,0575	0,0572
w_A	0,0135	0,0138	0,0139
	0,0136	0,0139	0,0140
m_B^ξ	0,1840	0,1997	0,2087
	0,1839	0,1997	0,2087
w_B	0,0178	0,0193	0,0199
	0,0178	0,0192	0,0200

Приведенные в таблицах результаты, полученные на трех сетках, свидетельствуют о сходимости решений. Они иллюстрируют также, что разработанные здесь и в [116] алгоритмы приводят к практически одинаковым решениям рассмотренных выше задач.

2.6. Расчет изгибаемых плит с использованием обобщенных уравнений МКР.

Запишем обобщенное уравнение МКР [25], аппроксимирующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} = -p, \quad (2.6.1)$$

на равномерной сетке. Будем учитывать лишь разрывы Δm^ξ , Δm^η , p_{ij} :

$$\begin{aligned} & 4 \frac{\tau}{h} m_{i-1,j} + \\ & + 4 \frac{h}{\tau} m_{i,j-1} - 8 \left(\frac{\tau}{h} + \frac{h}{\tau} \right) m_{i,j} + 4 \frac{h}{\tau} m_{i,j+1} + \\ & + 4 \frac{\tau}{h} m_{i+1,j} + \\ & + 2(\tau \Delta^{I-II} m_{i,j}^\xi + \tau \Delta^{III-IV} m_{i,j}^\xi + h \Delta^{I-III} m_{i,j}^\eta + h \Delta^{II-IV} m_{i,j}^\eta) = \\ & = -\tau h ({}^I p_{i,j} + {}^{III} p_{i,j} + \\ & \quad + {}^{II} p_{i,j} + {}^{IV} p_{i,j}). \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Рассмотрим член уравнения $\tau \cdot \Delta^{I-II} m_{i,j}^\xi = \frac{\tau}{k} \cdot k \Delta^{I-II} m_{i,j}^\xi = \tau_k \cdot \Delta^{I-II} \tilde{m}_{i,j}^\xi$, где

$\tau_k = \frac{\tau}{k}$; $\Delta^{I-II} \tilde{m}_{i,j}^\xi = k \Delta^{I-II} m_{i,j}^\xi$. Пусть $k > 1$ – произвольное число; поскольку Δm^ξ – произвольно, можно обозначить $k \Delta m^\xi = \Delta \tilde{m}^\xi$. Поскольку $k > 1$, то $\tau_k < \tau$. Пусть τ_k – отрезок на котором распределена линейная нагрузка (см. рисунок 2.6.1 в плане)

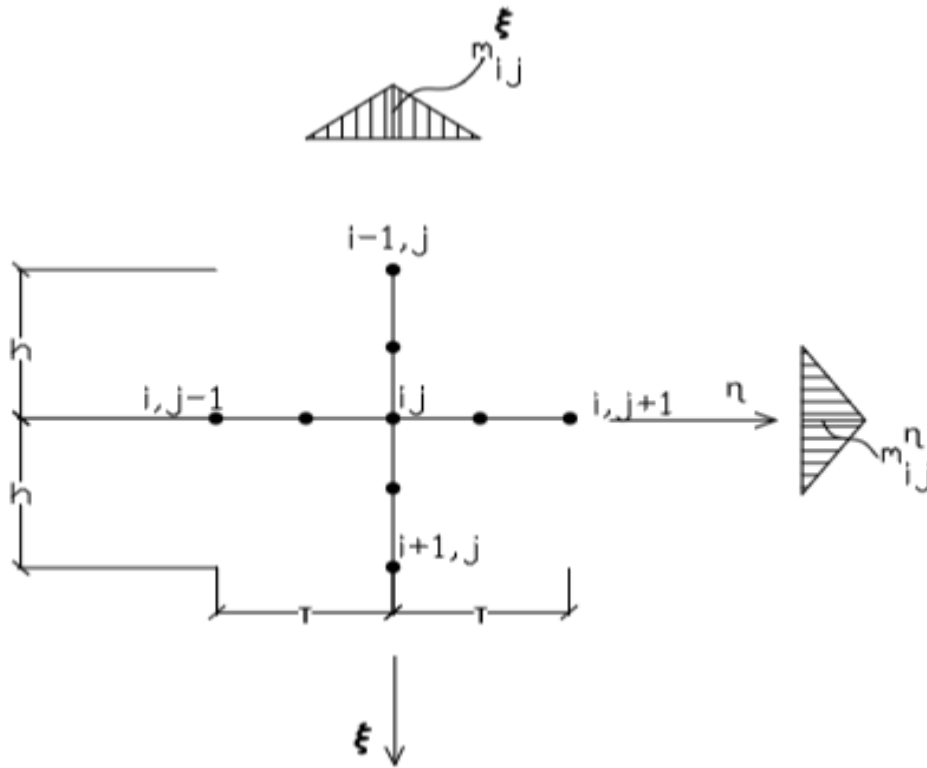


Рис.2.6.1.

Действие, приложенной в точке i, j сосредоточенной силы, заменим участками полосовой нагрузки вдоль осей ξ и η . Распределение локальной нагрузки принимаем по закону треугольника в каждом из координатных направлений. Равнодействующая этой нагрузки должна равняться безразмерной сосредоточенной силе ΔP :

$$\frac{1}{2}\tau_k\Delta^{I-II}\tilde{m}_{i,j}^\xi + \frac{1}{2}\tau_k\Delta^{III-IV}\tilde{m}_{i,j}^\xi + \frac{1}{2}h_k\Delta^{I-III}\tilde{m}_{i,j}^\eta + \frac{1}{2}h_k\Delta^{II-IV}\tilde{m}_{i,j}^\eta = \Delta P_{i,j};$$

отсюда:

$$\begin{aligned} \tau_k\Delta^{I-II}\tilde{m}_{i,j}^\xi + \tau_k\Delta^{III-IV}\tilde{m}_{i,j}^\xi + h_k\Delta^{I-III}\tilde{m}_{i,j}^\eta + h_k\Delta^{II-IV}\tilde{m}_{i,j}^\eta = \\ = \tau\Delta^{I-II}m_{i,j}^\xi + \tau\Delta^{III-IV}m_{i,j}^\xi + h\Delta^{I-III}m_{i,j}^\eta + h\Delta^{II-IV}m_{i,j}^\eta = 2\Delta P_{i,j}. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Подставляя (2.6.3) в (2.6.2) и поделив на 4, получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau}{h} m_{i-1,j} + \\
& + \frac{h}{\tau} m_{i,j-1} - 2 \left(\frac{\tau}{h} + \frac{h}{\tau} \right) m_{i,j} + \frac{h}{\tau} m_{i,j+1} + \\
& + \frac{\tau}{h} m_{i+1,j} = -\Delta P_{i,j} - \tau h ({}^I p_{i,j} + {}^{III} p_{i,j} + \\
& \quad + {}^{II} p_{i,j} + {}^{IV} p_{i,j}).
\end{aligned} \tag{2.6.4}$$

При $\tau = h$ и отсутствии разрывов p :

$$\begin{aligned}
& m_{i-1,j} + \\
& + m_{i,j-1} - 4m_{i,j} + m_{i,j+1} + \\
& + m_{i+1,j} = -\Delta P_{i,j} - h^2 p_{i,j}.
\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

Дифференциальное уравнение для определения безразмерных прогибов следует из (2.6.1) с заменой m, p на w, m . Тогда (при $\Delta P_{i,j} = 0$), из (2.6.5) следует разностное уравнение для определения w :

$$\begin{aligned}
& w_{i-1,j} + \\
& + w_{i,j-1} - 4w_{i,j} + w_{i,j+1} + \\
& + w_{i+1,j} = -h^2 m_{i,j}.
\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

Пример

Рассчитаем квадратную шарнирно опертую пластину на действие сосредоточенной безразмерной силы $\Delta P_{i,j} = 1$ с учетом краевых условий $w = m = 0$.

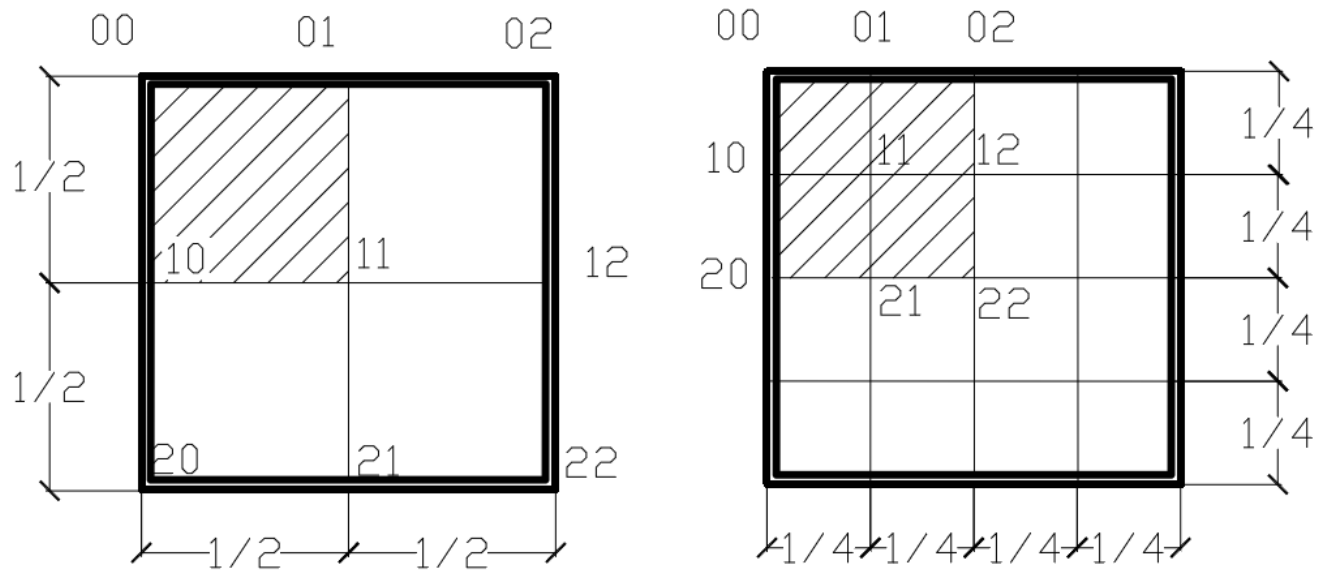


Рис. 2.6.2

Запишем уравнения (2.6.5) и (2.6.6) на минимальной расчетной сетке при $h = \frac{1}{2}$ (см. рис. 2.6.2а): $-4m_{11} = -1$; $-4w_{11} = -\frac{1}{2^2}m_{i,j}$. Откуда $m_{11} = 0.25$, $w_{11} = 0.015625$ (погрешность 34.5%). По [120] аналитическое решение $w_{11} = 0.01160$.

Запишем указанные выше уравнения при $h = \frac{1}{4}$ (рис. 2.6.2б) с учетом симметрии

$$-4m_{11} + 2m_{21} = 0;$$

$$-4m_{21} + 2m_{11} + m_{22} = 0;$$

$$-4m_{22} + 4m_{21} = -1.$$

Из решения системы уравнений $m_{11} = 0.0625$; $m_{21} = 0.125$; $m_{22} = 0.375$.

$$-4w_{11} + 2w_{21} = -\frac{1}{4^2}0.0625;$$

$$-4w_{21} + 2w_{11} + w_{22} = -\frac{1}{4^2}0.125;$$

$$-4w_{22} + 4w_{21} = -\frac{1}{4^2} 0.375.$$

Получим $w_{11} = 0.004883$; $w_{21} = 0.007813$; $w_{22} = 0.013672$ (погрешность 17%).

Получим второй вариант разностного уравнения, аппроксимирующего (2.6.1) при действии сосредоточенной силы. Для этого рассмотрим четыре граничащих друг с другом участка, как показано на рисунке 2.6.3.

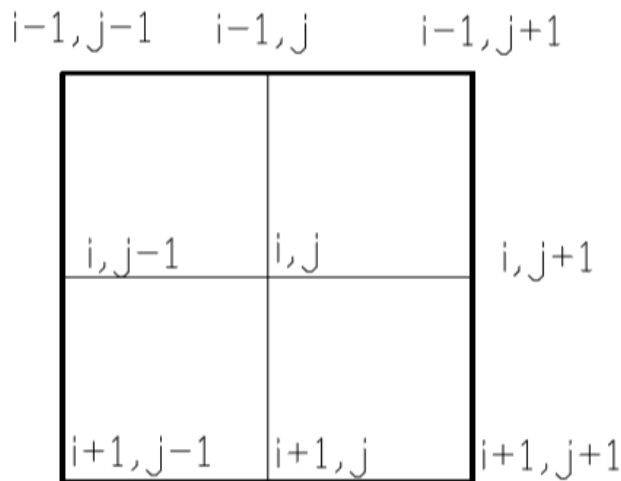


Рис. 2.6.3.

Запишем обобщенные уравнения МКР [25] для точек контура выделенной области.

Для точки $i-1, j-1$:

$$\begin{aligned}
 & -hm_{i-1, j-1}^{\xi} - \\
 & -hm_{i-1, j-1}^{\eta} - 2m_{i-1, j-1} + m_{i-1, j} + \\
 & + m_{i, j-1} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.6.7}$$

Для точки $i-1, j$:

$$\begin{aligned}
& -2hm_{i-1,j}^{\xi} + \\
m_{i-1,j-1} - 4m_{i-1,j} + m_{i-1,j+1} + & \\
& + 2m_{i,j} = 0.
\end{aligned} \tag{2.6.8}$$

Для точки $i-1, j+1$:

$$\begin{aligned}
& -hm_{i-1,j+1}^{\xi} + \\
+ m_{i-1,j} - 2m_{i-1,j+1} + hm_{i-1,j+1}^{\eta} + & \\
& + m_{i,j+1} = 0.
\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

Для точки $i, j+1$:

$$\begin{aligned}
& m_{i-1,j+1} + \\
+ 2m_{i,j} - 4m_{i,j+1} + 2hm_{i,j+1}^{\eta} + & \\
& + m_{i+1,j+1} = 0.
\end{aligned} \tag{2.6.10}$$

Для точки $i+1, j+1$:

$$\begin{aligned}
& m_{i,j+1} + \\
+ m_{i+1,j} - 2m_{i+1,j+1} + hm_{i+1,j+1}^{\eta} + & \\
& + hm_{i+1,j+1}^{\xi} = 0.
\end{aligned} \tag{2.6.11}$$

Для точки $i+1, j$:

$$\begin{aligned}
& 2m_{i,j} + \\
+ m_{i+1,j-1} - 4m_{i+1,j} + m_{i+1,j+1} + & \\
& + 2hm_{i+1,j}^{\xi} = 0.
\end{aligned} \tag{2.6.12}$$

Для точки $i+1, j-1$:

$$\begin{aligned}
& m_{i,j-1} + \\
+ hm_{i+1,j-1}^{\eta} - 2m_{i+1,j-1} + m_{i+1,j} + & \\
& + hm_{i+1,j-1}^{\xi} = 0.
\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

Для точки $i, j-1$:

$$\begin{aligned}
& m_{i-1,j-1} - \\
- 2hm_{i,j-1}^{\eta} - 4m_{i,j-1} + 2m_{i,j} + & \\
& + m_{i+1,j-1} = 0.
\end{aligned} \tag{2.6.14}$$

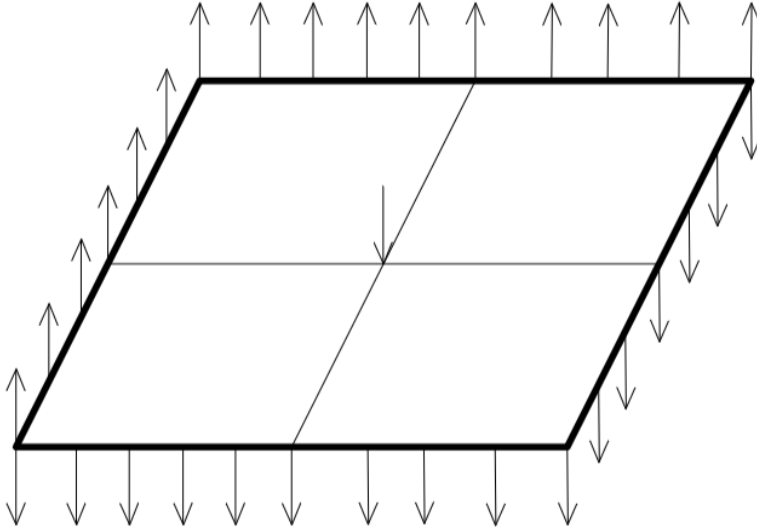


Рис.2.6.4.

Численно интегрируя функции поперечных сил по направлениям ζ и η вдоль краев выделенного фрагмента с использованием формулы Симпсона, составим уравнение равновесия всех сил на ось Z (рис. 2.6.4.)

$$\begin{aligned} \frac{2h}{6} & \left(-m_{i-1,j-1}^{\xi} - 4m_{i-1,j}^{\xi} - m_{i-1,j+1}^{\xi} - \right. \\ & - m_{i-1,j-1}^{\eta} - 4m_{i,j-1}^{\eta} - m_{i+1,j+1}^{\eta} + \\ & + m_{i+1,j-1}^{\xi} + 4m_{i+1,j}^{\xi} + m_{i+1,j+1}^{\xi} + \\ & \left. + m_{i-1,j+1}^{\eta} + 4m_{i,j+1}^{\eta} + m_{i+1,j+1}^{\eta} \right) + P = 0. \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

Умножая (2.6.15) на 3 и подставляя значения m^{ξ} , m^{η} из (2.6.7) – (2.6.14) окончательно получим:

$$\begin{aligned} & -2m_{i-1,j-1} + 6m_{i-1,j} - 2m_{i-1,j+1} + \\ & + 6m_{i,j-1} - 16m_{i,j} + 6m_{i,j+1} - \\ & - 2m_{i+1,j-1} + 6m_{i+1,j} - 2m_{i+1,j+1} + 3P = 0 \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

Решим ранее рассмотренную задачу с использованием уравнения (2.6.16)

при $h = \frac{1}{2}$: $-16m_{1,1} + 3P = 0$. Откуда $m_{1,1} = \frac{3}{16} = 0.1875$.

По (4.6) $-4w_{1,1} = -\frac{1}{2^2}m_{1,1}$; $w_{1,1} = 0.01172$ (погрешность 1%).

Сгустим расчетную сетку и найдем решение при $h = \frac{1}{4}$ с учетом симметрии.

Для этого запишем уравнение (2.6.16) для точек 11, 21, 22 (рис. 2.6.2б), полагая, что сила $P=1$ приложена в точке 22.

$$-16m_{1,1} + 12m_{2,1} - 2m_{2,2} = 0;$$

$$12m_{1,1} - 20m_{2,1} + 6m_{2,2} = 0;$$

$$-8m_{1,1} + 24m_{2,1} - 16m_{2,2} + 3 \cdot 1 = 0.$$

Решая систему уравнений, получим $m_{1,1} = 0.0714$, $m_{2,1} = 0.1607$, $m_{2,2} = 0.3929$.

Для тех же точек запишем уравнение (2.6.6)

$$-4w_{1,1} + 2w_{2,1} = -\frac{1}{4^2}0.0714;$$

$$2w_{1,1} - 4w_{2,1} + w_{2,2} = -\frac{1}{4^2}0.1607;$$

$$4w_{2,1} - 4w_{2,2} = -\frac{1}{4^2}0.3929.$$

Откуда $w_{1,1} = 0.00572$, $w_{2,1} = 0.00921$, $w_{2,2} = 0.0153$. Погрешность значительно возросла (32.3%).

Запишем для точек 11, 21 обычные уравнения МКР, а для точки 22 – (2.6.16):

$$-4m_{1,1} + 2m_{2,1} = 0;$$

$$2m_{1,1} - 4m_{2,1} + m_{2,2} = 0;$$

$$-8m_{1,1} + 24m_{2,1} - 16m_{2,2} + 3 \cdot 1 = 0.$$

Решив систему, получим $m_{1,1} = 0.0536$, $m_{2,1} = 0.1071$, $m_{2,2} = 0.3214$. Вновь решая систему уравнений относительно прогибов

$$-4w_{1,1} + 2w_{2,1} = -\frac{1}{4^2} 0.0536;$$

$$2w_{1,1} - 4w_{2,1} + w_{2,2} = -\frac{1}{4^2} 0.1071;$$

$$4w_{2,1} - 4w_{2,2} = -\frac{1}{4^2} 0.3914, \text{ получим } w_{1,1} = 0.00419, w_{2,1} = 0.0067, w_{2,2} = 0.0117.$$

Выше нами продемонстрировано два подхода к расчету пластин на действие сосредоточенной нагрузки. В первом случае действие сосредоточенной силы заменялось локальной полосовой нагрузкой типа «крест», во втором случае для получения алгебраического уравнения, аппроксимирующего (4.1) в точке приложения нагрузки, рассматривалось равновесие локальной области.

При реализации второго подхода, увеличивая число разбиений расчетной сетки, мы одновременно повышаем степень сосредоточения нагрузки. Т.е. число разбиений не только будет увеличивать точность, но и приближать к абстракции сосредоточенной силы. Это интересно с точки зрения сопоставления с аналитическим решением. Но сосредоточенной силы (в понимании точечной силы, силы приложенной в точку) в природе нет. Поэтому для численного метода

не меньший интерес представляет разработка алгоритма на действие локальных нагрузок с большой степенью сосредоточения.

2.6 Выводы по главе 2.

В главе 2 разработан алгоритм расчета по МПА ортотропных пластин на статические нагрузки с одновременным определением безразмерных погибов w и их вторых частных производных $w^{\xi\xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$; $w^{\eta\eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}$. Тестовых задачи по расчету пластин с различными краевыми условиями иллюстрируют быструю сходимость решений и достаточную для практического применения точность разработанного алгоритма. Эти обстоятельства позволяют распространить разработанный здесь алгоритм на решение задач по расчету ортотропных пластины на свободные и вынужденные колебания, что выполнено в 3 главе настоящей диссертации. Отдельным параграфом рассмотрен вопрос локализации поперечной нагрузки с привлечением обобщенных уравнений МКР.

Глава 3: Численное решение задач о свободных и вынужденных колебаниях ортотропных пластин.

3.1. Алгоритм расчета ортотропных пластин по определению частот и форм собственных колебаний: примеры расчета.

Материал пластин в отношении своих упругих свойств обладает тремя плоскостями симметрии. При отсутствии динамической нагрузки пластина может совершать свободные колебаниями, вызванные возмущениями, которые задаются в виде начальных условий. Полагая, что свободные колебания являются гармоническими, и используя метод разделения переменных, получают дифференциальное уравнение для определения как частот, так и форм колебаний, которое для ортотропных пластин постоянной толщины без учета поглощения энергии [78] при переходе к обозначению жесткостей по [120] имеет вид:

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \omega^2 \bar{\mu} W = 0. \quad (3.1.1)$$

где ω - круговая частота собственных колебаний; $\bar{\mu}$ масса пластины на единицу площади; W - прогиб; D_x, D_y, H - жесткости ортотропных пластин в трех взаимно перпендикулярных направлениях, значения которых определяются экспериментальным путем.

При $D_x = H = D_y = D$ из (3.1.1) можно получить уравнение изотропных плит.

Для перехода к безразмерным величинам положим:

$$a = \frac{D_x}{D_y}; \gamma = \frac{H}{D_y}; \xi = xa^{-1}; \eta = ya^{-1}; w = W \frac{D_y}{\mu a^4}. \quad (3.1.2)$$

где a – длина одной из сторон; x, y - оси координат.

Запишем уравнение (3.1.1) с учетом безразмерных величин:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 2\gamma \frac{d^4 w}{d\xi^2 d\eta^2} + \frac{d^4 w}{d\eta^4} - \Psi w = 0. \quad (3.1.3)$$

$$\text{где } \Psi - \text{ безразмерная величина: } \Psi = \omega^2 \frac{\bar{\mu} a^4}{D_y}. \quad (3.1.4)$$

Дифференциальное уравнение четвертого порядка (3.1.3) представим как дифференциальное уравнение второго порядка, относительно вторых производных w :

$$\frac{d^2 w^{\xi\xi}}{d\xi^2} + \gamma \frac{d^2 w^{\xi\xi}}{d\eta^2} + \gamma \frac{d^2 w^{\eta\eta}}{d\xi^2} + \frac{d^2 w^{\eta\eta}}{d\eta^2} = \Psi w. \quad (3.1.5)$$

$$\text{где } w^{\xi\xi} = \frac{d^2 w}{d\xi^2}; w^{\eta\eta} = \frac{d^2 w}{d\eta^2}. \quad (3.1.6)$$

Задавая шаг сетки h и при этом принимая разрывы равными нулю, разностную аппроксимацию (3.1.5) по методу последовательных аппроксимаций получим:

$$\begin{aligned} & (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - \\ & - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 20(\alpha + \gamma)w_{i,j}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\ & + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma)w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + \\ & + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - \\ & - 2(\gamma - 5)w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 20(\gamma + 1)w_{i,j}^{\eta\eta} - 2(2\gamma - 5)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\ & + (\gamma + 1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} = \\ & = \frac{h^2}{6} \Psi (w_{i-1,j-1} + 4w_{i-1,j} + w_{i-1,j+1} + 52w_{i,j} + \\ & + 4w_{i,j+1} + w_{i+1,j-1} + 4w_{i+1,j} + w_{i+1,j+1}). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

На рисунке 3.1 показан фрагмент сетки, на которой строится решение. Каждое из выражений (3.1.6) формально можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Аппроксимируя их разностными уравнением Б.В.Нумерова [96], которое является частным случаем уравнения в [22], получим:

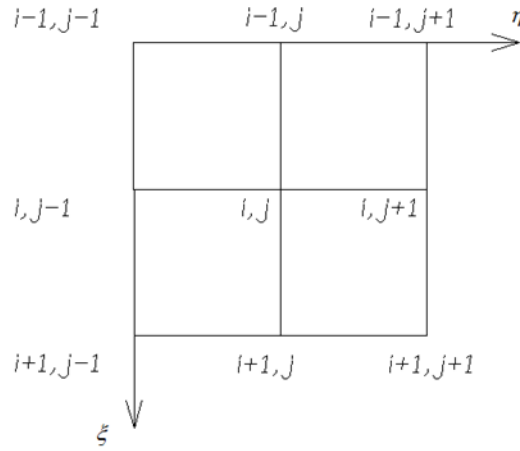


Рис.3.1. - Фрагмент сетки

i, j - координаты точек

$$w_{i,j-1} - 2w_{ij} + w_{i,j+1} = \frac{h^2}{12} (w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 10w_{i,j}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta}); \quad (3.1.8)$$

$$w_{i-1,j} - 2w_{ij} + w_{i+1,j} = \frac{h^2}{12} (w_{i-1,j}^{\xi\xi} + 10w_{i,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi}). \quad (3.1.9)$$

При решении задач удобнее пользоваться линейными комбинациями этих уравнений, а именно их разностью и суммой:

$$w_{i-1,j} + w_{i+1,j} - w_{i,j-1} - w_{i,j+1} + \frac{h^2}{12} (w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 10w_{i,j}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta} - w_{i-1,j}^{\xi\xi} - 10w_{i,j}^{\xi\xi} - w_{i+1,j}^{\xi\xi}) = 0 \quad (3.1.10)$$

$$w_{i-1,j} - 4w_{i,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} - \frac{h^2}{12} (w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 10w_{i,j}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta} + w_{i-1,j}^{\xi\xi} + 10w_{i,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi}) = 0 \quad (3.1.11)$$

Определим частоты шарнирно опертой ортотропной плиты на сетке 2×2 , решая уравнение (3.1.7) совместно с уравнениями (3.1.10) и (3.1.11). Записываем эти уравнения для точки с координатами $\xi, \eta=1,1$, учитывая краевые условия $w = w^{\xi\xi} = w^{\eta\eta} = 0$ и принимая $h=1/2$, получим:

$$-20(\alpha + \gamma)w_{1,1}^{\xi\xi} - 20(\gamma + 1)w_{1,1}^{\eta\eta} - \frac{26}{3} \frac{1}{2^2} \Psi w_{1,1} = 0$$

$$-10w_{1,1}^{\xi\xi} + 10w_{1,1}^{\eta\eta} = 0; 10(w_{1,1}^{\xi\xi} + 10w_{1,1}^{\eta\eta}) = -4 \cdot 12 \cdot 2^2 w_{1,1}.$$

При $w_{1,1}^{\xi\xi} \neq 0$ получим $\Psi = (1 + 2\gamma + \alpha) \cdot 88,62$.

Из формулы (3.1.4) находим значение круговой частоты собственных колебаний:

$$\omega = \frac{9,41}{a^2} \sqrt{1 + 2\gamma + \alpha} \sqrt{\frac{D_y}{\bar{\mu}}}. \quad (3.1.12)$$

В работе [1] определена частота основного тона колебаний ортотропной шарнирно опертой по контуру квадратной пластины:

$$\omega = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{1 + 2\gamma + \alpha} \sqrt{\frac{D_y}{\bar{\mu}}} = \frac{9,87}{a^2} \sqrt{1 + 2\gamma + \alpha} \sqrt{\frac{D_y}{\bar{\mu}}}. \quad (3.1.13)$$

Полученное в данной статье значение круговой частоты отличается от результата работы [78] на 4,66%.

Для уточнения результата следует решать на более мелкой сетке и при конкретных значениях α и γ .

Представляет интерес сравнение полученных нами численных решений с приближенными решениями задач в работе [123] методом декомпозиции. В этой работе приближенная формула для частоты основного тона колебаний, в частности, квадратной ортотропной плиты с защемленным контуром, дает результат, совпадающий с результатом [78], полученным энергетическим методом, и отличается от найденного решения при числе разбиений $\eta = 16$ на 0,2%.

Полученные решения в [78] и [123] не распространяются на плиты, у которых хотя бы одна сторона свободна от закреплений, и дает значения только минимальной частоты.

Разработанная численная методика предусматривает любую комбинацию краевых условий и позволяет при необходимости найти высшие частоты, для чего

используется приведенный здесь алгоритм. Отличие состоит только в том, что итерационный процесс начинается с уже найденного значения. Численный метод последовательных аппроксимаций дает возможность строить алгоритм расчета, как при действии статических, так и динамических нагрузок [31,116]. Наряду с представленным методом можно указать работу [9], где для расчета изотропных плит на динамические воздействия используются методы непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений движения и решение с применением функций А.Н.Крылова.

3.2. Примеры расчета ортотропных плит по определению частот и форм собственных колебаний.

В качестве первого примера расчета по составленной программе рассмотрим квадратную шарнирно опертую по контуру ортотропную пластину, для которой была получена при минимальном числе разбиений величина ω . Ниже будем

$$\text{определять } \omega = \bar{\omega} \cdot \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{\partial y}{\mu}}, \quad (3.2.1)$$

$$\text{где } \bar{\omega} = \sqrt{\Psi}; \quad (3.2.2).$$

Тогда для рассматриваемого примера получим:

$$\bar{\omega} = 9,41\sqrt{1+2\alpha+\gamma}. \quad (3.2.3)$$

В приведенных далее примерах будем полагать,

$$\alpha = 0,4823; \gamma = 0,6944; \mu = 0,2083. \quad (3.2.4)$$

При этих значениях коэффициентов следует $\bar{\omega} = 15,9400$. Точный результат [78] $\bar{\omega} = 16,7234$.

В табл. 3.1 приводятся значения ω_{\min} , полученные на различных сетках: в нижней строке- погрешность численных результатов по сравнению с результатами [78]; n-число разбиений стороны плиты.

Таблица 3.1.

n	2	4	8	12	16
$\bar{\omega}$	15,9400	16,6743	16,7204	16,7232	16,7227
Погрешность в %	-4,7	-0,3	-0,02	-0,001	-0,004

Второй пример расчета.

Прямоугольная ортотропная плита, жестко заделанная по всему контуру (рис.2.4). В [78] энергетическим методом получено приближенное значение ω_{\min} .

Запишем формулу (63.5) [78] в следующем виде:

$$\omega = \frac{22,45}{b^2} \sqrt{\frac{1}{\mu}} \sqrt{\frac{D_x}{C^4}} + 0,5H \frac{H}{C^2} + D_y; \quad (3.2.5)$$

где $C = a/b$.

Перепишем (3.2.5) с учетом (2.2.2):

$$\omega = 22,45 \sqrt{\alpha + 0,5H\gamma \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}} \cdot \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D_y}{\mu}}; \quad (3.2.6)$$

Сопоставляя (3.2.6) с (3.2.1), получим:

$$\bar{\omega} = 22,45 \sqrt{\alpha + 0,571\gamma \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}. \quad (3.2.7)$$

При значениях α, γ по (3.2.7) и $\frac{a}{b} = 0,5$ (рис.2.4) по (3.2.7) найдем:

$$\bar{\omega} = 22,45 \sqrt{0,4823 + 0,571 \cdot 0,6944 \cdot 0,52 + 0,54} = 18,01.$$

В табл. 3.2 даются значения ω , вычисленные по составленной нами программе при различных значениях числа разбиений n меньшей стороны ортотропной плиты по рис. 2.4.

Таблица 3.2

n	2	8	12	16
ω	15,122	17,955	17,959	17,962

Видно, что табл. 3.2 иллюстрирует сходимость численного решения. Если плита квадратная, по (3.2.7) ($\frac{a}{b}=1$) получим $\bar{\omega}=30,77$. В табл.3.3 даются значения $\bar{\omega}$ для квадратной ортотропной плиты со всеми четырьмя заделанными сторонами. Отметим, что для ортотропной плиты форма колебаний не симметрична относительно диагонали.

Таблица 3.3

n	4	8	16
$\bar{\omega}$	33,225	30,748	30,708

Полученные результаты близки к приближенным результатам [78], найденным энергетическим методом.

В табл.3.4 даются значения w в расчетных точках рис. 3.2 они определяют форму основного тона собственных колебаний квадратной ортотропной плиты, жестко заделанной по всему контуру. Эта форма соответствует значению $\bar{\omega} = 30,75$, вычисленному при $n=8$ (табл.3.3)

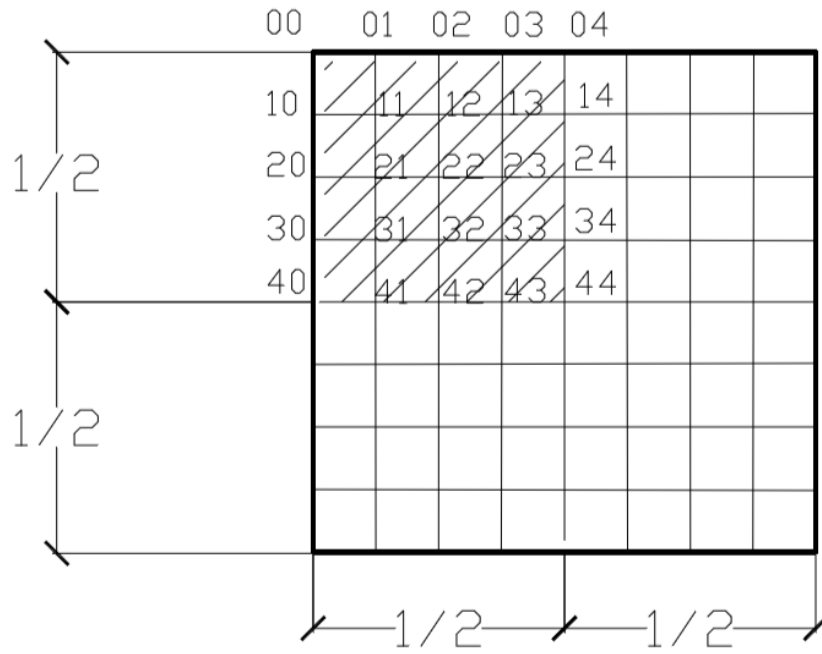


Рис.3.2

Таблица 3.4

i/j	1	2	3	4
1	0,0339	0,1077	0,1741	0,2000
2	0,1053	0,3152	0,4992	0,5707
3	0,1666	0,4916	0,7728	0,8815
4	0,1900	0,5590	0,8772	1

Третий пример расчета.

Изотропная прямоугольная плита, у которой две стороны шарнирно оперты, две другие жестко заделаны (рис.3.3). Формула для ω следует из (3.2.1) при $D_y = D$.

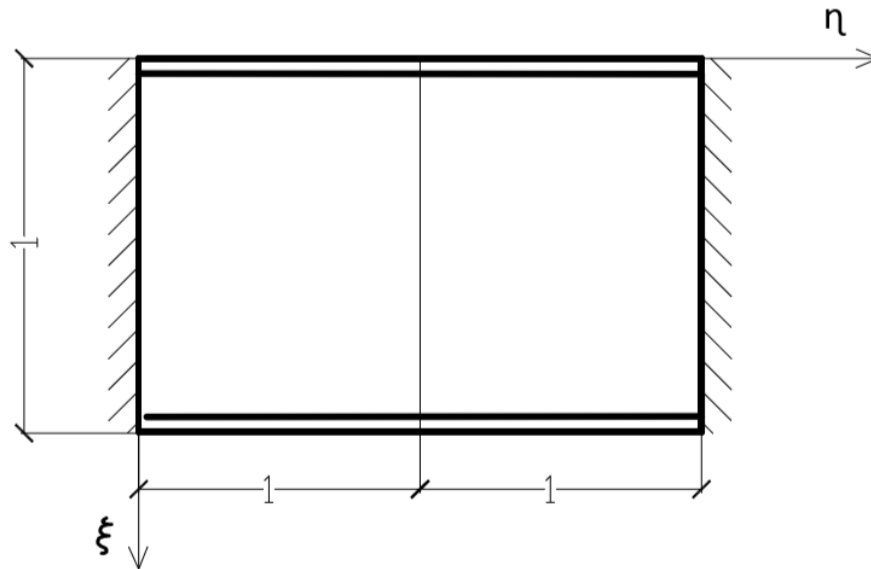


Рис.3.3

По формуле (8.80) [121] находим частоту основного тона собственных колебаний.

Для расчета изотропных плит на ЭВМ достаточно в составленной нами программе положить $\alpha = \gamma = 1; \mu = \nu$ где ν - коэффициент Пуассона. Значения $\bar{\omega}$, полученные для рассматриваемой задачи на ЭВМ, приводятся в табл.3.5 при различных значениях разбиения n меньшей стороны плиты.

$$\bar{\omega} = \pi^2 \sqrt{1 + 1,506^2 \cdot 0,5^4 + 2 \cdot 0,5^2 \cdot 1 \cdot 1,248} = 13,765.$$

Табл.3.5

n	2	4	8	12	16
$\bar{\omega}$	13,396	13,660	13,684	13,685	13,686

При $n=16$ погрешность численного решения -0,58%

Четвертый пример расчета.

Квадратная изотропная плита, у которой три стороны шарнирно оперты, четвертая - свободная от закреплений (рис.3.4)

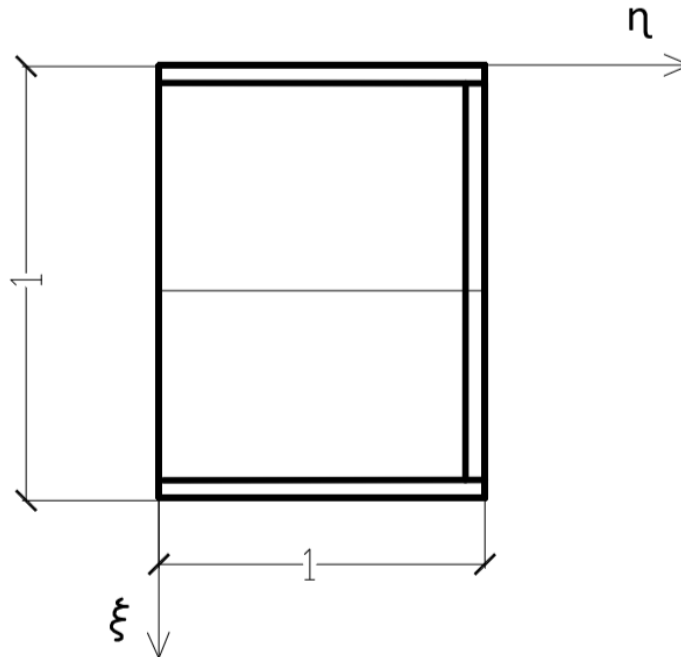


Рис.3.4

По формуле (8.80) [121] при $\nu = 0,3$ для рассматриваемого примера получим: $\bar{\omega}_{\min} = \pi^2 \sqrt{1 + 2 \cdot 1 \cdot 0,7 \cdot \frac{3}{\pi^2}} = 11,783$.

В табл.3.6 даются значения $\bar{\omega}$, вычисленные на ЭВМ при различных n разбиениях стороны плиты.

Табл.3.6

n	4	8	12	16
$\bar{\omega}$	11,492	11,639	11,668	11,675

При $n=16$ погрешность численного решения -0,92%.

Выводы по §3.1 и §3.2. Построенный выше численный алгоритм для определения ω и форм собственных колебаний, обладает высокой точностью. Что видно из приведенных примеров расчета как изотропных, так и ортотропных пластин. Это обстоятельство позволяет на базе разработанной методики перейти к расчету ортотропных пластины на вынужденные колебания. Затухание колебаний не учитывалось: взятые для сравнения известные результаты получены без учета демпфирования.

Отметим также, что в нашей работе МПА впервые используются для определения частот и форм собственных колебаний пластин. В работах [25] получены численные решения МПА по расчету пластин и пологих оболочек, но только на вынужденные колебания.

3.3 Методы прямого интегрирования дифференциальных уравнений вдоль оси времени.

Термин «прямое» [9] означает, что предварительно не производится никаких преобразований уравнений движения типа разделения переменных. Равновесие той или иной системы с учетом сил инерции (и демпфирования) рассматривается в дискретных точках временных интервалов. При этом используется методика численного решения статических задач на каждом временном слое.

В [9] подробно изложены методы прямого интегрирования: Хаболта, Вилсона, Ньюмарка. Показано, что схема интегрирования Хаболта представляет собой метод, аналогичный методу центральных разностей. Методы Вилсона и Ньюмарка в [9] представлены как модификации метода линейного ускорения. Это означает, что искомое перемещение в интервале времени Δt меняется по закону кубической параболы. В [9] показано также, что методы Ньюмарка и Вилсона безусловно устойчивы. Однако достигается это за счет введения

специальных параметров : $\theta = 1,37$ в методе Вилсона и $\delta = 0,5$; $\alpha = 0,25$ в методе Ньюмарка.

В работе [25] было предложено описывать изменения вдоль временной оси в виде параболического сплайна. Для этого в интервале времени $\Delta t = \bar{\tau}$ строится квадратная парабола по значениям ω_{i-1}^t в начале интервала и ω_i^t в конце интервала. Тогда для вычисления ускорения и скорости в конце интервала $\Delta t = \bar{\tau}$ получаются следующие формулы [25]:

$$W_i'' = -\frac{2}{\bar{\tau}}W_{i-1}' - \frac{2}{\bar{\tau}^2}(W_{i-1} - W_i); \quad (3.3.1)$$

$$W_i' = -W_{i-1}' - \frac{2}{\bar{\tau}}(W_{i-1} - W_i). \quad (3.3.2)$$

где $W' = \frac{dW}{dt}$; $W'' = \frac{d^2W}{dt^2}$; i отсчитывается вдоль оси t .

Если в формулах (3.3.1), (3.3.2) $W = W(x, y, t)$; то $W' = \frac{\partial W}{\partial t}$; $W'' = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$

Предложенная в [25] методика интегрирования является условно устойчивой. Она была успешно использована благодаря своей простоте для расчета на различные динамические воздействия изгибаемых балок, плит, пологих оболочек в [25], а также для расчета сжато-изогнутых балок и пластин в [110]. В работе [110] показано также, что условием устойчивости метода при расчете плит, является выполнение соотношения

$$\bar{\tau} \leq 0,5h^2. \quad (3.3.3)$$

где $h, \bar{\tau}$ - безразмерные шаги сетки соответственно по пространственным координатам и по времени.

На многочисленных примерах приведенных в [25, 110], показано также, что устойчивость интегрирования вдоль оси t соблюдается также при нарушении условия (3.3.3), например, при $\bar{\tau} \approx 0,5h^2$ [110].

При решении динамических задач в этой главе мы будем пользоваться формулами (3.3.1), (3.3.2), соблюдая по возможности условие (3.3.3) для надежности численной реализации разработанного ниже алгоритма.

3.4. Разработка методики расчета на вынужденные колебания.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний, т.е уравнение движения под действием переменной нагрузки $q(x, y, t)$ полученное в [78] без учета внутреннего сопротивления материала, запишем для ортотропной пластинки, переходя к обозначениям жесткостей по [22]:

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \bar{\mu} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (3.4.1)$$

В случае учета затухания по Фойгту уравнение (3.4.1) принимает вид:

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^2 W}{\partial x^4} + \bar{\mu} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \bar{c} \frac{\partial W}{\partial t} = q(x, y, t). \quad (3.4.2)$$

где \bar{c} - параметр затухания; t - время. Пояснения остальных величин даны выше. При $D_x = H = D_y = D$ из (3.4.2) как частый случай следует уравнение для изотропных плит постоянной жесткости.

Приведем (3.4.2) и безразмерному виду:

$$\alpha \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2\gamma \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{t}^2} + \bar{C} \frac{\partial W}{\partial \bar{t}} = p; \quad (3.4.3)$$

где $\bar{t} = \frac{t}{a^2} \sqrt{\frac{D_y}{\bar{\mu}}}$ - безразмерное время; $\bar{C} = \frac{\bar{c} \cdot a^2}{\sqrt{D_y \cdot \bar{\mu}}}$; $p = \frac{q(x, y, t)}{q_0}$.

Далее запишем (3.4.3) с учетом (2.2.14) в следующем виде:

$$\alpha \frac{\partial^4 W^{\xi\xi}}{\partial \xi^4} + \gamma \frac{\partial^4 W^{\xi\xi}}{\partial \eta^2} + \gamma \frac{\partial^2 W^{\eta\eta}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W^{\eta\eta}}{\partial \eta^2} = p - w^{\bar{\eta}} - \bar{C} \cdot w^{\bar{\eta}}; \quad (3.4.4)$$

$$\text{где } w^{\bar{\eta}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{t}^2}; w^{\bar{\eta}} = \frac{\partial W}{\partial \bar{t}}. \quad (3.4.5)$$

Из сопоставления (3.4.4) с (3.3.15) следует, что аппроксимация по МПА на квадратной сетке при постоянных в пределах элементов, но разрывных в точке ij (рис. 2.2.) величинах p , может быть выполнена так $\psi.w$ на $-(w^{\bar{\eta}} + \bar{C} \cdot w^{\bar{\eta}})$. При записи этого уравнения будем полагать:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^{I-II} q_{i,j-1/2}^{(\xi)} &= \frac{1}{2} \left[\Delta^{I-II} q_{i,j-1/2}^{(\xi)} + \Delta^{I-II} q_{i,j}^{(\xi)} \right] \\ \Delta^{III-IV} q_{i,j+1/2}^{(\xi)} &= \frac{1}{2} \left[\Delta^{III-IV} q_{i,j}^{(\xi)} + \Delta^{III-IV} q_{i,j+1}^{(\xi)} \right] \\ \Delta^{I-III} q_{i-1/2,j}^{(\eta)} &= \frac{1}{2} \left[\Delta^{I-III} q_{i-1,j}^{(\eta)} + \Delta^{I-III} q_{i,j}^{(\eta)} \right] \\ \Delta^{II-IV} q_{i+1/2,j}^{(\eta)} &= \frac{1}{2} \left[\Delta^{II-IV} q_{i,j}^{(\eta)} + \Delta^{II-IV} q_{i+1,j}^{(\eta)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.4.6)$$

В результате получим:

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - \\
& - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 20(\alpha + \gamma)w_{i,j}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma)w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\alpha - 1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - \\
& - 2(\alpha - 5)w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 20(\gamma + 1)w_{i,j}^{\eta\eta} - 2(\gamma - 5)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + h \left\{ \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2 \right)^{I-II} \Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} - \left(4 + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \left[{}^{I-II} \Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} \right] + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2 \right)^{III-IV} \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right\} + \\
& + h \left\{ (\gamma - 2)^{I-III} \Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} - (4 + \gamma) \left[{}^{I-III} \Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{ij}^{(\eta)} \right] + (\gamma - 2)^{II-IV} \Delta q_{i+1,j}^{(\eta)} \right\} = \\
& = 3h^2 ({}^I p_{ij} + {}^II p_{ij} + {}^III p_{ij} + {}^IV p_{ij}) - \\
& \frac{h^2}{6} \left[w_{i-1,j-1}^{\bar{\bar{w}}} + 4w_{i-1,j}^{\bar{\bar{w}}} + w_{i-1,j+1}^{\bar{\bar{w}}} + \right. \\
& + 4w_{i,j-1}^{\bar{\bar{w}}} + 52w_{i,j}^{\bar{\bar{w}}} + 4w_{i,j+1}^{\bar{\bar{w}}} + \\
& + w_{i+1,j-1}^{\bar{\bar{w}}} + 4w_{i+1,j}^{\bar{\bar{w}}} + w_{i+1,j+1}^{\bar{\bar{w}}} + \\
& + \bar{C} \left(w_{i-1,j-1}^{\bar{w}} + 4w_{i-1,j}^{\bar{w}} + w_{i-1,j+1}^{\bar{w}} + \right. \\
& + 4w_{i,j-1}^{\bar{w}} + 52w_{i,j}^{\bar{w}} + 4w_{i,j+1}^{\bar{w}} + \\
& \left. \left. + w_{i+1,j-1}^{\bar{w}} + 4w_{i+1,j}^{\bar{w}} + w_{i+1,j+1}^{\bar{w}} \right) \right]. \tag{3.4.7}
\end{aligned}$$

При расчете на динамические нагрузки следует иметь в виду, что в (3.4.7):

$$p = p(\xi, \eta, t); \Delta q^\xi = \Delta q^\xi(\eta, t); \Delta q^\eta = \Delta q^\eta(\xi, t).$$

Если эти нагрузки не меняются вдоль пространственных координат, то

$$p = p(t); \Delta q^\xi = \Delta q^\xi(t); \Delta q^\eta = \Delta q^\eta(t).$$

Для определения входящих в (3.4.7) $w^{\bar{\bar{w}}}$ и $w^{\bar{w}}$ воспользуемся формулами (3.3.1) и (3.3.2). В точке ij пространственной сетки запишем эти формулы в следующем виде:

$$w_{ij}^{\bar{\bar{w}}(k)} = -\frac{2}{\tau} \bar{v}_{ij}^{(k-1)} - \frac{5h^2}{12\tau^2} \left[\tilde{w}_{ij}^{(k-1)} - \tilde{w}_{ij}^{(k)} \right]; \tag{3.4.8}$$

$$\bar{v}_{ij}^{(k)} = -\bar{v}_{ij}^{(k-1)} - \frac{5h^2}{12\tau} \left[\tilde{w}_{ij}^{(k-1)} - \tilde{w}_{ij}^{(k)} \right]; \tag{3.4.9}$$

Где $\bar{v} = w^{\bar{i}}$; k - номер временного слоя, на котором определяются неизвестные уравнения (3.4.7); $\tau = \bar{\tau}$ - шаг вдоль безразмерной временной оси.

Записываем рекуррентные формулы (3.4.8), (3.4.9) для расчетной точки рис. 2.2 и подставляем их в (3.4.7). При этом $w^{\xi\xi}; w^{\eta\eta}; \Delta q^{(\xi)}; \Delta q^{(\eta)}; p$ не будем снабжать верхним индексом k , полагая, что все перечисленные величины относятся к временному слою k . В результате после несложных преобразований получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - \\
& - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 20(\alpha + \gamma)w_{i,j}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - \gamma)w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\alpha - 1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} - \\
& - 2(\alpha - 5)w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 20(\gamma + 1)w_{i,j}^{\eta\eta} - 2(\gamma - 5)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + \frac{5}{72} \left(1 + \tau \bar{C}\right) \frac{h^4}{\tau^2} \left[\tilde{w}_{i-1,j-1}^k + 4\tilde{w}_{i-1,j}^k + \tilde{w}_{i-1,j+1}^k + \right. \\
& + 4\tilde{w}_{i,j-1}^k + 52\tilde{w}_{i,j}^k + 4\tilde{w}_{i,j+1}^k + \\
& \left. + \tilde{w}_{i+1,j-1}^k + 4\tilde{w}_{i+1,j}^k + \tilde{w}_{i+1,j+1}^k \right] + \\
& + h \left\{ \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2 \right)^{I-II} \Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} - \left(4 + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \left[{}^{I-II} \Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} \right] + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2 \right)^{III-IV} \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right\} + \\
& + h \left\{ (\gamma - 2)^{I-III} \Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} - (4 + \gamma) \left[{}^{I-III} \Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{ij}^{(\eta)} \right] + (\gamma - 2)^{II-IV} \Delta q_{i+1,j}^{(\eta)} \right\} = \\
& = \Omega^{(k-1)} + 3h^2 ({}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} + {}^{III} p_{ij} + {}^{IV} p_{ij}), \tag{3.4.10}
\end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned}
\Omega^{(k-1)} = & \frac{5}{72} \left(1 + \tau \bar{C}\right) \frac{h^4}{\tau^2} \left[w_{i-1,j-1}^{(k-1)} + 4w_{i-1,j}^{(k-1)} + w_{i-1,j+1}^{(k-1)} + \right. \\
& + 4w_{i,j-1}^{(k-1)} + 52w_{i,j}^{(k-1)} + 4w_{i,j+1}^{(k-1)} + \\
& \left. + w_{i+1,j-1}^{(k-1)} + 4w_{i+1,j}^{(k-1)} + w_{i+1,j+1}^{(k-1)} \right] + \\
& + \frac{h^2}{3\tau} \left(1 + \frac{\tau}{2} \bar{C}\right) \left[v_{i-1,j-1}^{-(k-1)} + 4v_{i-1,j}^{-(k-1)} + v_{i-1,j+1}^{-(k-1)} + \right. \\
& + 4v_{i,j-1}^{-(k-1)} + 52v_{i,j}^{-(k-1)} + 4v_{i,j+1}^{-(k-1)} + \\
& \left. + v_{i+1,j-1}^{-(k-1)} + 4v_{i+1,j}^{-(k-1)} + v_{i+1,j+1}^{-(k-1)} \right].
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Далее уравнение (2.4.5), (3.4.6). перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& -2(\gamma + 1)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + \\
& + 2(\gamma + 1)w_{i,j-1}^{\xi\xi} + 20(\gamma + 1)(w_{i,j}^{\eta\eta} - w_{i,j}^{\xi\xi}) + 2(\gamma + 1)w_{i,j+1}^{\eta\eta} - \\
& - 2(\gamma + 1)w_{i+1,j}^{\xi\xi} + \\
& + 5(\gamma + 1) \left[\tilde{w}_{i-1,j}^k - \tilde{w}_{i,j-1}^k - \tilde{w}_{i,j+1}^k + \tilde{w}_{i+1,j}^k \right] - \\
& - h(\gamma + 1) \left[\Delta^{I-II} q_{i,j}^{(\xi)} + \Delta^{III-IV} q_{i,j}^{(\xi)} - \Delta^{I-III} q_{i,j}^{(\eta)} - \Delta^{II-IV} q_{i,j}^{(\eta)} \right] = 0;
\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

$$\begin{aligned}
& 2(\alpha + \gamma)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + \\
& - 2(\alpha + \gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} + 20(\alpha + \gamma)(w_{i,j}^{\eta\eta} - w_{i,j}^{\xi\xi}) - 2(\alpha + \gamma)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + 2(\alpha + \gamma)w_{i+1,j}^{\xi\xi} - \\
& - 5(\alpha + \gamma) \left[\tilde{w}_{i-1,j}^k - \tilde{w}_{i,j-1}^k - \tilde{w}_{i,j+1}^k + \tilde{w}_{i+1,j}^k \right] + \\
& + h(\alpha + \gamma) \left[\Delta^{I-II} q_{i,j}^{(\xi)} + \Delta^{III-IV} q_{i,j}^{(\xi)} - \Delta^{I-III} q_{i,j}^{(\eta)} - \Delta^{II-IV} q_{i,j}^{(\eta)} \right] = 0;
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

Суммируя (3.4.10) отдельно с (3.4.12) и отдельно с (3.4.13), получим два следующих уравнения:

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - 2\gamma - 1)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - \\
& - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 20(\alpha + 2\gamma + 1)w_{i,j}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 2(5\alpha - 2\gamma - 1)w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + 12w_{i,j-1}^{\eta\eta} + 12w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + \frac{5}{72}\left(1 + \tau\bar{C}\right)\frac{h^4}{\tau^2}\left[\tilde{w}_{i-1,j-1}^k + \tilde{w}_{i-1,j+1}^k + \tilde{w}_{i+1,j-1}^k + \tilde{w}_{i+1,j+1}^k + 52\tilde{w}_{i,j}^k\right] + \\
& + 5\left(1 + \gamma + \frac{1 + \tau\bar{C}}{18}\frac{h^4}{\tau^2}\right)\left[\tilde{w}_{i-1,j}^k + \tilde{w}_{i+1,j}^k\right] - 5\left(1 + \gamma - \frac{1 + \tau\bar{C}}{18}\frac{h^4}{\tau^2}\right)\left[\tilde{w}_{i,j-1}^k + \tilde{w}_{i,j+1}^k\right] + \\
& + h\left\{\left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2\right)^{I-II}\Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} - \left(5 + \alpha + \frac{\gamma}{\alpha}\right)\left[{}^{I-II}\Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV}\Delta q_{ij}^{(\xi)}\right] + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2\right)^{III-IV}\Delta q_{i,j+1}^{(\xi)}\right\} + \\
& + h\left\{(\gamma - 2)^{I-III}\Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} - 3\left[{}^{I-III}\Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV}\Delta q_{ij}^{(\eta)}\right] + (\gamma - 2)^{II-IV}\Delta q_{i+1,j}^{(\eta)}\right\} = \\
& = \Omega^{(k-1)} + 3h^2({}^I p_{ij} + {}^II p_{ij} + {}^III p_{ij} + {}^IV p_{ij});
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \gamma)w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + 12\alpha w_{i-1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} - \\
& - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j-1}^{\xi\xi} - 2(\alpha - 5\gamma)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + 12\alpha w_{i+1,j}^{\xi\xi} + (\alpha + \gamma)w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i-1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + 2(\alpha + 2\gamma - 5)w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 20(\alpha + 2\gamma + 1)w_{i,j}^{\eta\eta} + 2(\alpha + 2\gamma - 5)w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + (\gamma + 1)w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + 2(5\gamma - 1)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + (\gamma + 1)w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + \frac{5}{72}\left(1 + \tau\bar{C}\right)\frac{h^4}{\tau^2}\left[\tilde{w}_{i-1,j-1}^k + \tilde{w}_{i-1,j+1}^k + \tilde{w}_{i+1,j-1}^k + \tilde{w}_{i+1,j+1}^k + 52\tilde{w}_{i,j}^k\right] + \\
& - 5\left(\alpha + \gamma - \frac{1 + \tau\bar{C}}{18}\frac{h^4}{\tau^2}\right)\left[\tilde{w}_{i-1,j}^k + \tilde{w}_{i+1,j}^k\right] + 5\left(\alpha + \gamma + \frac{1 + \tau\bar{C}}{18}\frac{h^4}{\tau^2}\right)\left[\tilde{w}_{i,j-1}^k + \tilde{w}_{i,j+1}^k\right] + \\
& + h\left\{\left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2\right)^{I-II}\Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} - \left(\alpha + \gamma - 4 - \frac{\gamma}{\alpha}\right)\left[{}^{I-II}\Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV}\Delta q_{ij}^{(\xi)}\right] + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2\right)^{III-IV}\Delta q_{i,j+1}^{(\xi)}\right\} + \\
& + h\left\{(\gamma - 2)^{I-III}\Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} - (4 + \alpha + 2\gamma)\left[{}^{I-III}\Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV}\Delta q_{ij}^{(\eta)}\right] + (\gamma - 2)^{II-IV}\Delta q_{i+1,j}^{(\eta)}\right\} = \\
& = \Omega^{(k-1)} + 3h^2({}^I p_{ij} + {}^II p_{ij} + {}^III p_{ij} + {}^IV p_{ij}).
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

Уравнение (3.4.10) перепишем с учетом (2.4.14) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \tilde{w}_{i-1,j}^k + \\
& + \tilde{w}_{i,j-1}^k - 4\tilde{w}_{i,j}^k + \tilde{w}_{i,j+1}^k + \\
& + \tilde{w}_{i+1,j}^k - \\
& - 0,4w_{i,j-1}^{\eta\eta} - 4(w_{i,j}^{\xi\xi} + w_{i,j}^{\eta\eta}) - 0,4w_{i,j+1}^{\eta\eta} - \\
& - 0,4w_{i+1,j}^{\xi\xi} - \\
& - \frac{h}{5} \left[{}^{I-II} \Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} - {}^{I-III} \Delta q_{ij}^{(\eta)} - {}^{II-IV} \Delta q_{ij}^{(\eta)} \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Уравнения (2.3.7), (2.3.9), (2.3.11), остаются без изменений. А в уравнениях (2.3.8) и (2.3.10) следует p_{ij} заменить на $P_{ij} - \omega_{ij}^{\bar{\tau}} - \bar{c} \cdot \omega_{ij}^{\bar{\xi}}$. Тогда с учетом (4.3.4), (4.3.2) из (2.3.8) и (2.3.10) соответственно получим:

$$\begin{aligned}
& (\alpha - \mu^2)w_{i-1,j}^{\xi\xi} + \\
& + 2[\mu(2 + \mu) - \alpha - 2\gamma]w_{i,j}^{\xi\xi} + 2(2\gamma + \mu)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + 2w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + (\alpha - \mu^2)w_{i+1,j}^{\xi\xi} - h^2 p_{i,j} + \\
& + 2h^0 v_{i,j}^{\eta} - \mu^0 m_{i-1,j}^{\eta} + 2(1 + \mu)^0 m_{i,j}^{\eta} - {}^0 m_{i+1,j}^{\eta} - \\
& - 2 \frac{h^2}{\tau} \left(1 + \frac{\tau}{2} \bar{C} \right)^{-(k-1)} v_{i,j} - \frac{5}{12} \frac{h^4}{\tau^2} \left(1 + \tau \bar{C} \right) \left[\tilde{w}_{i,j}^{(k-1)} - \tilde{w}_{i,j}^k \right] = 0;
\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\mu^2}{\alpha} \right) w_{i-1,j}^{\eta\eta} + \\
& + 2 \left[\mu \left(2 + \frac{\mu}{\alpha} \right) - 1 - 2\gamma \right] w_{i,j}^{\eta\eta} + \left(1 - \frac{\mu^2}{\alpha} \right) w_{i,j+1}^{\eta\eta} + \\
& + 2(2\gamma - \mu)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + \\
& + 2\alpha w_{i+1,j}^{\xi\xi} - h^2 p_{i,j} + \\
& + 2h^0 v_{i,j}^{\xi} - \frac{\mu}{\alpha} {}^0 m_{i,j-1}^{\xi} + 2 \left(1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) {}^0 m_{i,j}^{\xi} - \frac{\mu}{\alpha} {}^0 m_{i,j+1}^{\xi} - \\
& - 2 \frac{h^2}{\tau} \left(1 + \frac{\tau}{2} \bar{C} \right)^{-(k-1)} v_{i,j} - \frac{5}{12} \frac{h^4}{\tau^2} \left(1 + \tau \bar{C} \right) \left[\tilde{w}_{i,j}^{(k-1)} - \tilde{w}_{i,j}^k \right] = 0.
\end{aligned} \tag{3.4.18}$$

В (4.3.17), (4.3.18) величины ${}^0 v^{\xi}$, ${}^0 v^{\eta}$, ${}^0 m^{\xi}$, ${}^0 m^{\eta}$ являются функциями времени t .

3.5. Алгоритм расчета на динамические воздействия.

На каждом конкретном временном слое систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $w^{\xi\xi}, w^{\eta\eta}, \tilde{w}$ будем решать итерационным методом Зейделя. При этом уравнение (2.4.14) остается без изменений. Уравнения (3.4.14), (3.4.15) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
w_{i,j}^{\xi\xi} = & \left\{ (\alpha + \gamma) \left(w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} + w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + w_{i+1,j+1}^{\xi\xi} \right) + \right. \\
& + 2(5\alpha - 2\gamma - 1) \left(w_{i-1,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi} \right) + 2(5\gamma - \alpha) \left(w_{i,j-1}^{\xi\xi} + w_{i,j+1}^{\xi\xi} \right) + \\
& + (\gamma + 1) \left(w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} + w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + w_{i+1,j+1}^{\eta\eta} \right) + \\
& + 2(5\gamma - 1) \left(w_{i-1,j}^{\eta\eta} + w_{i+1,j}^{\eta\eta} \right) + 12 \left(w_{i,j-1}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta} \right) + \\
& + \frac{5}{72} \left(1 + \tau \bar{C} \right) \frac{h^4}{\tau^2} \left[\tilde{w}_{i-1,j-1}^k + \tilde{w}_{i-1,j+1}^k + \tilde{w}_{i+1,j-1}^k + \tilde{w}_{i+1,j+1}^k + 52 \tilde{w}_{i,j}^k \right] + \\
& + 5 \left(1 + \gamma + \frac{1 + \tau \bar{C}}{18} \frac{h^4}{\tau^2} \right) \left[\tilde{w}_{i-1,j}^k + \tilde{w}_{i+1,j}^k \right] - 5 \left(1 + \gamma - \frac{1 + \tau \bar{C}}{18} \frac{h^4}{\tau^2} \right) \left[\tilde{w}_{i,j-1}^k + \tilde{w}_{i,j+1}^k \right] + \\
& + h \left\{ \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2 \right) \left({}^{I-II} \Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{i,j+1}^{(\xi)} \right) - \left(5 + \gamma + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \left[{}^{I-II} \Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV} \Delta q_{ij}^{(\xi)} \right] \right\} + \\
& + h \left\{ (\gamma - 2) \left({}^{I-III} \Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{i+1,j}^{(\eta)} \right) - 3 \left[{}^{I-III} \Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV} \Delta q_{ij}^{(\eta)} \right] \right\} = \\
& = \Omega^{(k-1)} + 3h^2 ({}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} + {}^{III} p_{ij} + {}^{IV} p_{ij}) / 20\bar{a};
\end{aligned}$$

(3.5.1)

$$\begin{aligned}
w_{i,j}^{\eta\eta} &= \{(\alpha + \gamma)(w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} + w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + w_{i+1,j+1}^{\xi\xi}) + \\
&+ 2(5\alpha + 2\gamma - 1)(w_{i-1,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi}) + 2(5\gamma - \alpha)(w_{i,j-1}^{\xi\xi} + w_{i,j+1}^{\xi\xi}) + \\
&+ (\gamma + 1)(w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} + w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + w_{i+1,j+1}^{\eta\eta}) + \\
&+ 2(5\gamma - 1)(w_{i-1,j}^{\eta\eta} + w_{i+1,j}^{\eta\eta}) + 12(w_{i,j-1}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta}) + \\
&+ \frac{5}{72}(1 + \tau\bar{C})\frac{h^4}{\tau^2}[\tilde{w}_{i-1,j-1}^k + \tilde{w}_{i-1,j+1}^k + \tilde{w}_{i+1,j-1}^k + \tilde{w}_{i+1,j+1}^k + 52\tilde{w}_{i,j}^k] + \\
&- 5\left(\alpha + \gamma - \frac{1 + \tau\bar{C}}{18}\frac{h^4}{\tau^2}\right)\left[\tilde{w}_{i-1,j}^k + \tilde{w}_{i+1,j}^k\right] + 5\left(\alpha + \gamma + \frac{1 + \tau\bar{C}}{18}\frac{h^4}{\tau^2}\right)\left[\tilde{w}_{i,j-1}^k + \tilde{w}_{i,j+1}^k\right] + \\
&+ h\left\{\left(\frac{\gamma}{\alpha} - 2\right)\left({}^{I-II}\Delta q_{i,j-1}^{(\xi)} + {}^{III-IV}\Delta q_{i,j+1}^{(\xi)}\right) - h\left(\alpha + \gamma - 4 - \frac{\gamma}{\alpha}\right)\left[{}^{I-II}\Delta q_{ij}^{(\xi)} + {}^{III-IV}\Delta q_{ij}^{(\xi)}\right]\right\} + \\
&+ h\left\{(\gamma - 2)\left({}^{I-III}\Delta q_{i-1,j}^{(\eta)} + {}^{II-IV}\Delta q_{i+1,j}^{(\eta)}\right) - h(4 + \alpha + 2\gamma)\left[{}^{I-III}\Delta q_{ij}^{(\eta)} + {}^{II-IV}\Delta q_{ij}^{(\eta)}\right]\right\} = \\
&= \Omega^{(k-1)} + 3h^2({}^I p_{ij} + {}^{II} p_{ij} + {}^{III} p_{ij} + {}^{IV} p_{ij}) / 20\bar{a}.
\end{aligned} \tag{3.5.2}$$

где: $\bar{a} = 1 + \alpha + 2\gamma$.

Аналогично из (3.5.1)-(3.5.2) получим формулы для итерационного решения уравнения:

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_{i,j}^k &= 0,25[\tilde{w}_{i-1,j}^k + \tilde{w}_{i,j-1}^k + \tilde{w}_{i,j+1}^k + \tilde{w}_{i+1,j}^k] - \\
&- w_{i,j}^{\xi\xi} - w_{i,j}^{\eta\eta} - 0,1(w_{i-1,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi} + w_{i,j-1}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta}) - \\
&- 0,05h\left[{}^{I-II}\Delta q_{i,j}^{(\xi)} + {}^{III-IV}\Delta q_{i,j}^{(\xi)} - {}^{I-III}\Delta q_{ij}^{(\eta)} - {}^{II-IV}\Delta q_{ij}^{(\eta)}\right];
\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

$$\begin{aligned}
w_{i,j}^{\xi\xi} &= \{(\alpha - \mu^2)(w_{i-1,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi}) + 2(2\gamma - \mu)w_{i,j+1}^{\xi\xi} + 2w_{i,j+1}^{\eta\eta} - \\
&- h^2 p_{ij} + 2h^0 v_{i,j}^{\eta} - \mu[{}^0 m_{i-1,j}^{\eta} + {}^0 m_{i+1,j}^{\eta}]\} + 2(1 + \mu){}^0 m_{i,j}^{\eta} - \\
&- 2\frac{h^2}{\tau}\left(1 + \frac{\tau\bar{C}}{2}\right)v_{i,j}^{(k-1)} - \frac{5}{12}\frac{h^4}{\tau^2}\left(1 + \tau\bar{C}\right)\left[\tilde{w}_{i,j}^{(k-1)} - \tilde{w}_{i,j}^k\right] / 2[\alpha + 2\gamma - \mu(2 + \mu)];
\end{aligned} \tag{3.5.4}$$

$$\begin{aligned}
w_{i,j}^{\eta\eta} = & \left\{ \left(1 - \frac{\mu^2}{\alpha}\right) \left(w_{i,j-1}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta}\right) + 2(2\gamma - \mu)w_{i+1,j}^{\eta\eta} + 2w_{i+1,j}^{\xi\xi} - \right. \\
& - h^2 p_{ij} + 2h^0 v_{i,j}^{\xi} - \frac{\mu}{\alpha} \left[{}^0 m_{i,j-1}^{\xi} + {}^0 m_{i,j+1}^{\xi} \right] + 2\left(1 + \frac{\mu}{\alpha}\right) {}^0 m_{i,j}^{\xi} - \\
& \left. - 2\frac{h^2}{\tau} \left(1 + \frac{\tau}{2}\bar{C}\right) v_{i,j}^{-(k-1)} - \frac{5}{12} \frac{h^4}{\tau^2} \left(1 + \tau\bar{C}\right) \left[\tilde{w}_{i,j}^{(k-1)} - \tilde{w}_{i,j}^k\right] \right\} / 2 \left[1 + 2\gamma - \mu \left(2 + \frac{\mu}{\alpha}\right) \right].
\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Выражения (3.5.4), (3.5.3) справедливы соответственно для левого и верхнего края прямоугольной плиты ; для правого и нижнего краев они записываются в «зеркальном отображении» .

По формуле (3.5.3) определяются $\tilde{w}_{i,j}^k$ во внутренних точках сетки. Для определения \tilde{w}^k в точке ij верхнего и нижнего свободных краев ортотропной прямоугольной плиты получим из (2.4.1):

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_{i,j}^k = & 0,25 \left[\tilde{w}_{i,j-1}^k + \tilde{w}_{i,j+1}^k \right] + 0,5 \tilde{w}_{i,j}^k - \\
& - 0,1 \left[w_{i,j-1}^{\eta\eta} + h\Delta q_{i,j}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta} \right] - w_{i,j}^{\eta\eta}.
\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Уравнение для определения $\tilde{w}_{i,j}^k$ на левом и правом свободных от закреплений краев плиты следует из (3.3.4) с заменой η, i, j соответственно на ξ, j, i .

Алгоритм расчета следующий. В момент времени $\bar{t}=0$ по заданным значениям в каждой расчетной точке сетки \tilde{w}^0, \tilde{v}^0 (в частности нулевые) подсчитаем Ω^0 с использованием (3.4.10). При этом используются значения $q^{(\xi)}(t); \Delta q^{(\eta)}(t)$ в момент времени $t = \Delta\tilde{t} = \tau$. Итерационный процесс продолжается до исчерпания с наперед заданной точностью. По найденным $\tilde{w}_{i,j}^1$ с использованием заданных $\tilde{v}_{i,j}^0$ и $\tilde{w}_{i,j}^0$ определяем $\tilde{v}_{i,j}^1$. Это позволяет найти по (3.2.11) Ω^1 и перейти к определению $w^{\xi\xi}, w^{\eta\eta}$ и \tilde{w} при $k=2$. После этого вычисляются $\tilde{v}_{i,j}^2; \Omega^2$ и так далее. Расчет ведется в пределах заданного интервала времени \bar{t} .

На каждом временном слое « k » внутренние усилия определяются по описанному в главе 2 алгоритму.

По разработанному выше алгоритму была составлена программа для расчетов на ЭВМ. Целесообразно вначале решить по этой программе тестовые задачи. Тестовыми задачами могут служить расчеты изотропных плит, поскольку для их расчета используется одна и та же упомянутая выше программа; следует лишь положить, как указывалось в предыдущих главах, $\alpha = \gamma = 1; \mu = \nu; D_y = D$.

Выводы по главе 3.

В этой главе разработана методика расчета ортотропных прямоугольных пластин на вынужденных колебания. В основу методики получены разностные уравнения МПА и прямое интегрирование дифференциальных уравнений вдоль временной оси с использованием параболического силайна. По разработанному численному алгоритму составлена программа для ЭВМ, которая позволяет рассчитывать при различных краевых условиях как ортотропные плиты, так и изотропные с учетом и без учета демпфирования.

Глава 4. Примеры расчета пластин на динамические нагрузки

4.1. Примеры расчета изотропных плит на динамические нагрузки.

В качестве первой тестовой задачи рассмотрим расчет квадратной шарнирно опертой по всему контуру изотропной плиты на действие прямоугольного (вдоль оси времени) мгновенного импульса S , равномерно распределенного по всей площади плиты. Согласно [107] в начальный момент времени:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{S}{\bar{\mu}}. \quad (4.1.1)$$

Учтем, что $W = w \frac{a^4 q_0}{D}$; по §3.2: $t = \bar{t} \cdot a^2 \sqrt{\frac{D}{\bar{\mu}}}$. Тогда из (4.1.1) получим:

$$\frac{DW}{Dt} = w^{\bar{t}} = \bar{v}^{(0)} = \frac{S}{a^2 q_0} \sqrt{\frac{D}{\bar{\mu}}}. \quad (4.1.2)$$

Расчет можно вести на $\bar{v}^{(0)} = 1$; по найденным при этом w размерные величины W получим так: $W = w \cdot \frac{S}{a^2 q_0} \sqrt{\frac{D}{\bar{\mu}}} \cdot \frac{a^2 q_0}{D} = w \frac{S \cdot a^2}{\sqrt{D \cdot \bar{\mu}}}$.

В [25] по алгоритму решения задачи относительно неизвестных m и w для центра плиты получено $w_{\max} = 0,775$ при $h = \frac{1}{12}$; $\tau = \frac{1}{\pi \cdot 150}$; $\bar{C} = 0$ в момент времени $t = 0,16 \cdot T$, где T - период основного тона колебаний рассматриваемой плиты.

Поскольку $T = \frac{2\pi}{w}$, учитывая $w_{\min} = \frac{2\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\bar{\mu}}}$, найдем

$$T = \frac{a^2}{\pi} \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{D}}. \quad (4.1.3)$$

Подставляя в (4.1.3) $t = \bar{t} \cdot a^2 \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{D}}$, получим:

$$\bar{t} \cdot a^2 \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{D}} = 0,16 \frac{a^2}{\pi} \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{D}} . \quad (4.1.4)$$

Тогда безразмерное время, при котором достигается w_{\max} , будет $\bar{t} = \frac{0,16}{\pi}$.

В табл. 4.1 показаны значения w_{\max} и $m_{\max}^{(\xi)}$, полученные по составленной нами программе при различных значениях h и τ . Расчет проводился до момента времени $t=0,25T$.

Табл.4.1

h	1/8	1/10	1/12
τ	$\frac{1}{\pi^2 64}$	$\frac{1}{\pi^2 100}$	$\frac{1}{\pi^2 150}$
w_{\max}	0,0756	0,0772	0,0785
$m_{\max}^{(\xi)}$	1,003	1,165	1,233

Величины $m^{(\xi)}$ вычислялись при $\nu = 0,17$. При так же значениях ν , $t=0,16T$; $h = \frac{1}{12}$; $\tau = \frac{1}{\pi \cdot 150}$; $\bar{C} = 0$ в [25] получено $m_{\max}^{(\xi)} = 1,244$, в центре плиты. Результаты табл. 3.1 практически совпадают с полученными в [25].

Вторая тестовая задача.

Плита предыдущего примера загружена по всей площади равномерно распределенной нагрузкой [126]:

$$P_{ij}^{(k)} = \sin(1,6 \cdot \pi \cdot \bar{t}_k); \quad (4.1.5.)$$

где по [126] $\bar{t}_k = \frac{t}{T}$;

T - определяется по (4.1.3). Тогда:

$$\bar{t}_k = \frac{t \cdot \pi}{\alpha^2} \sqrt{\frac{D}{\mu}} = \pi \cdot \bar{t}. \quad (4.1.6)$$

Из (4.1.5) получим:

$$P_{ij}^{(k)} = \sin(1,6 \cdot \pi^2 \cdot \bar{t}); \quad (4.1.7)$$

$$\text{Или } P_{ij}^{(k)} = \sin(1,6 \cdot \pi^2 \cdot k \cdot \tau); \quad (4.1.8)$$

где k - номер временного слоя; τ - шаг вдоль безразмерной временной оси.

Расчет ведется при $\Delta q^{(\xi)} = \Delta q^{(\eta)}$; $\tilde{w}^0 = \tilde{v}^0 = 0$ тогда $\Omega^{(0)} = 0$.

Результаты, полученные при $\bar{C} = 0; \nu = 0,3$ и различных h и τ даны в табл. 4.2 (верхние значения). Нижние значения соответствуют результатам [126], полученными в момент времени $\bar{t} = \frac{0,40}{\pi}$. В таблице $m_{\max}^{(\xi)}$ и w_{\max} - значения наибольшего безразмерного изгибающего момента и безразмерного прогиба, возникающих в центре плиты по нашим расчетам при $\bar{t} > 0,40$.

Табл.4.2.

n	1/12	1/16	1/18
τ	$\frac{1}{\pi^2 64}$	$\frac{1}{\pi^2 100}$	$\frac{1}{\pi^2 150}$
$m^{(\xi)}$	$\frac{0,06181}{0,06140}$	$\frac{0,06177}{0,06197}$	$\frac{0,06174}{0,06234}$
w	$\frac{0,005111}{0,005136}$	$\frac{0,005104}{0,005171}$	$\frac{0,005102}{0,005195}$
$m_{\max}^{(\xi)}$	0,08761	0,08756	0,08753
w_{\max}	0,006984	0,007002	0,007011

Величина k , при которой достигаются $m_{\max}^{(\xi)}$ и w_{\max} по времени при

$$\tau = \frac{1}{\pi^2 150}, \text{ равна } 255.$$

Третья тестовая задача.

Квадратная изотропная плита, жестко заделанная по всему контуру, под нагрузкой из предыдущего примера. Результаты в виде $w; m^{(\xi)}; {}^3m^{(\xi)}$ даются в табл. 4.3 (верхние значения). Они получены при $\bar{C} = 0; \nu = 0,3$ и различных n и τ ; ${}^3m^{(\xi)}$ - значение безразмерного изгибающего момента в середине жестко заделанной стороны; $w; m^{(\xi)}$ соответствует середине плиты. Нижние значения этих же величин получены в [126] в момент времени $\bar{\tau} = \frac{0,32}{\pi}$.

Колебательный процесс изучался на отрезки времени $\bar{\tau} = \frac{0,40}{\pi}$.

Табл. 4.3

n	1/12	1/16	1/18
τ	$\frac{1}{\pi^2 64}$	$\frac{1}{\pi^2 100}$	$\frac{1}{\pi^2 150}$
w	$\frac{0,001480}{0,001498}$	$\frac{0,001463}{0,001487}$	$\frac{0,001453}{0,001482}$
$m^{(\xi)}$	$\frac{0,02712}{0,02621}$	$\frac{0,02682}{0,02662}$	$\frac{0,02668}{0,02691}$
${}^3m^{(\xi)}$	$\frac{-0,05886}{-0,05441}$	$\frac{-0,05863}{-0,05588}$	$\frac{-0,05846}{-0,05657}$

В таблице 4.4 даются максимальные значения величин, приведенных в табл.4.3. Оси получены нами в момент времени $\bar{\tau} = \frac{0,32}{\pi}$ при тех же $\bar{C} = 0; \nu = 0,3$.

Табл.4.3

h	1/12	1/16	1/18
τ	$\frac{1}{\pi^2 64}$	$\frac{1}{\pi^2 100}$	$\frac{1}{\pi^2 150}$
w	0,002121	0,002140	0,002156
$m^{(\xi)}$	0,04079	0,04112	0,04141
${}^3 m^{(\xi)}$	-0,07952	-0,08014	-0,08062

В завершение §4.1 решим вторую задачу с учетом затухания. Для этого следует установить близкую к реальной величине безразмерного параметра \bar{c} . С этой целью представим дифференциальное уравнение (3.2.2) в следующем виде:

$$\frac{1}{\bar{\mu}} \left(D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\bar{c}}{\bar{\mu}} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{q(x, y, t)}{\bar{\mu}}. \quad (4.1.9)$$

Сопоставляя (4.1.9) с дифференциальным уравнением колебаний системы с одной степенью свободы [73], приближенно получим:

$$\frac{\bar{c}}{\bar{\mu}} = 2\alpha = 2 \cdot \frac{\delta}{T}; \quad (4.1.10)$$

где δ - декремент затухания ; T - период основного тона колебаний плиты. При учете (3.5.5) из (4.1.10) следует:

$$\bar{c} = 2 \cdot \delta \frac{\pi}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\bar{\mu}}} \cdot \bar{\mu} = 2\pi \frac{\delta}{a^2} \sqrt{D \cdot \bar{\mu}}. \quad (4.1.11)$$

$$\text{Тогда для изотропной плиты: } \bar{c} = 2\pi \cdot \delta \frac{\sqrt{D \cdot \bar{\mu}}}{a^2} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{D \cdot \bar{\mu}}} = 2\pi\delta. \quad (4.1.12)$$

$$\text{По [118] } \delta = \frac{\Psi}{2} \mu; \quad (4.1.13)$$

$$\bar{C} = \pi\Psi. \quad (4.1.14)$$

По табл.3.1 [118] для безбалочных железобетонных перекрытий $\Psi_{cp} = 0,52$.

По (4.1.12) получим $\bar{C} \approx 1,5$.

Значения $m_{\max}^{(\xi)}$ и w_{\max} , вычисленных при этом значении $\bar{C} = 0; \nu = 0,17$ и прочих одних и тех же параметрах второй тестовой задачи приводятся в табл.4.5.

Табл. 4.5

n	1/12	1/16	1/18
τ	$\frac{1}{\pi^2 64}$	$\frac{1}{\pi^2 100}$	$\frac{1}{\pi^2 150}$
$m_{\max}^{(\xi)}$	0,07436	0,07460	0,07471
w_{\max}	0,006596	0,006622	0,006637

Из сравнения 4.2, 4.5 видно, что учет демпфирования заметно сказывается на величине изгибающих моментов и изгибов. При $\bar{C} = 1,5$ выбрано для железобетона, в расчетах было принято $\nu = 0,17$. Результаты же таблицы 3.2 получена при $\bar{C} = 0,4; \nu = 0,3$. Перерасчет при $\bar{C} = 1,5; \nu = 0,3$ для w_{\max} дает практически те же результаты, что и в таблицы 3.4. Изгибающие моменты возрастают.

4.2. Решение новых задач по расчету ортотропной пластины на динамические воздействия.

При расчете ортотропной пластины принимаем значения α, γ, μ по (3.4.4). Поскольку расчет ведется по одной и той же составленной нами программе, в этом все отличие от расчета изотропной пластины.

Первая задача- та же, что и в §4.1, но пластина ортотропная. Поэтому в табл.4.7 помимо w_{\max} и $m_{\max}^{(\xi)}$, приводим и значения $m_{\max}^{(\xi)}$: хотя плита квадратная и нагружение симметричное, в середине пластины $m^{(\xi)} \neq m^{(\eta)}$. Кроме того, табл.4.6 иллюстрирует: как и при статическом нагружении изгибающие моменты $m_{\max}^{(\eta)} > m_{\max}^{(\xi)}$, поскольку в направленной оси η жесткость ортотропной пластины выше. Заметим также, что свои максимальные значения искомые величины принимают в другие моменты времени, чем в изотропной плите. $\delta = \frac{\Psi}{2} \mu$; по (3.7.5): $\bar{C} = \pi\Psi$.

Для безбалочных железобетонных перекрытий. По (4.1.14) получим $\bar{C} = 1,5$.

Значения w_{\max} и $m_{\max}^{(\xi)}$, $\nu = 0,17$, вычисленные при этом значения прочих одних и тех же параметрах второй тестовой задачи приводится в табл.4.6.

Табл.4.6.

n	1/12 (84k)	1/16 (127k)	1/18 (191k)
τ	$\frac{1}{\pi^2 64}$	$\frac{1}{\pi^2 100}$	$\frac{1}{\pi^2 150}$
$m_{\max}^{(\xi)}$	0,05288	0,05282	0,05279
w_{\max}	0,004876	0,004869	0,004868

Табл.3.12.

n	1/8	1/10	1/12
ξ	$\frac{1}{\pi^2 64}$	$\frac{1}{\pi^2 100}$	$\frac{1}{\pi^2 150}$
w_{\max}	0,0905	0,0916	0,0923
$m_{\max}^{(\xi)}$	0,665	0,684	0,707
$m_{\max}^{(\eta)}$	0,891	0,873	0,869

Вторая задача - та же, что и в §4.1. Отличие в том, что плита ортотропная. В табл.4.8 даются результаты затухания (верхние значения) и с учетом затухания при $\bar{C} = 1,5$ (нижние значения). Колебательный процесс изучался в этой задаче на отрезке времени $\bar{t} = \frac{1}{\pi}$. На рис.4.1 показано изменение w в середине плиты в зависимости от времени; 2-ая кривая соответствует расчету без учета поглощение энергии, 1-ая с учетом; k -число временных слоев.

Табл.3.13

n	1/12	1/16	1/18
τ	$\frac{1}{\pi^2 64}$	$\frac{1}{\pi^2 100}$	$\frac{1}{\pi^2 150}$
w_{\max}	$\frac{0,009255}{0,008641}$	$\frac{0,009294}{0,008675}$	$\frac{0,009317}{0,008696}$
$m_{\max}^{(\eta)}$	$\frac{0,11001}{0,10264}$	$\frac{0,11056}{0,10312}$	$\frac{0,11090}{0,10344}$
$m_{\max}^{(\xi)}$	$\frac{0,06328}{0,05899}$	$\frac{0,06368}{0,05934}$	$\frac{0,06394}{0,05951}$

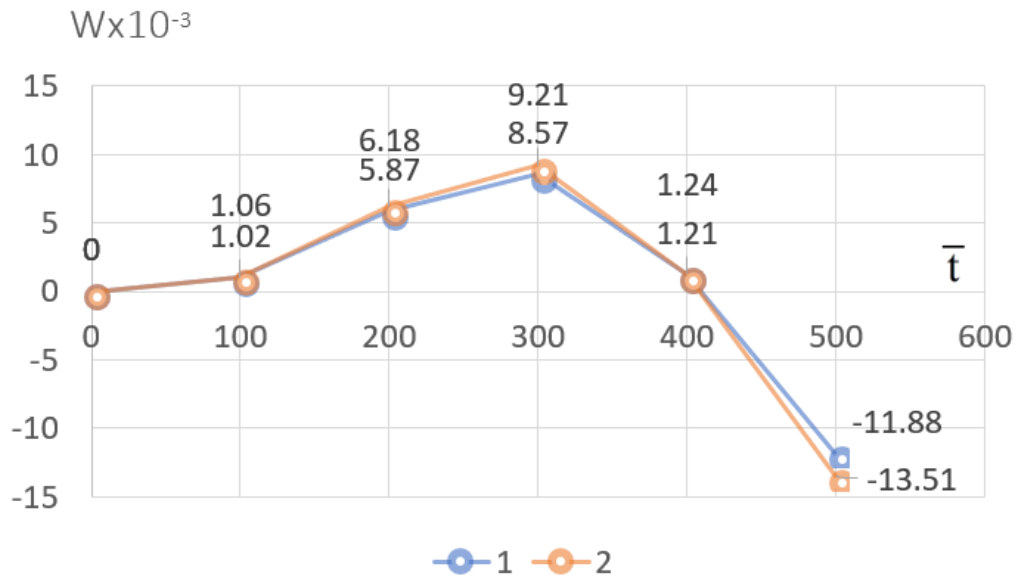


Рис. 4.1

Третья задача - квадратная жестко заделанная по всему контуру ортотропная плита под той же нагрузкой, что и изотропная плита в третьей задаче (§4.1). Результаты расчета для характерных точек, показанных на рис.4.2, полученные при $\bar{C} = 0$, даны в табл.4.9.

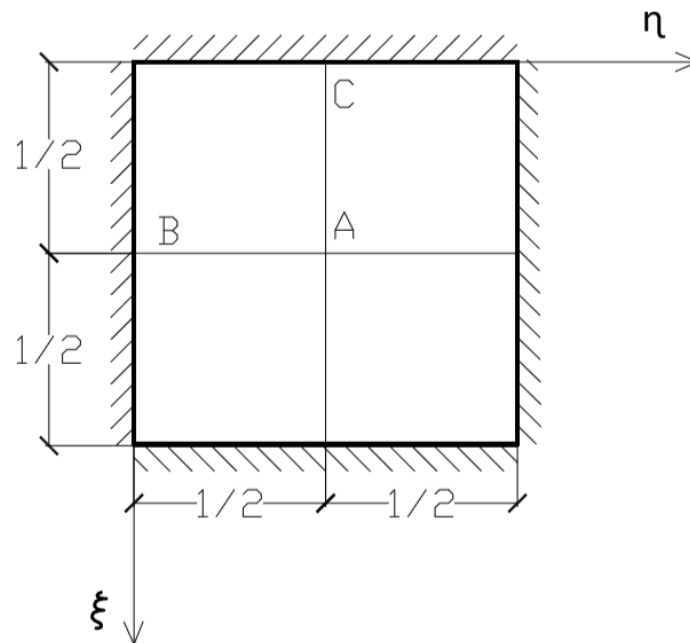


Рис.4.2

Табл.4.9

n	1/12	1/16	1/18
τ	$\frac{1}{\pi^2 64}$	$\frac{1}{\pi^2 100}$	$\frac{1}{\pi^2 150}$
w_A	0,003022	0,003051	0,003059
$m_A^{(\xi)}$	0,03058	0,03088	0,03106
$m_A^{(\eta)}$	0,05573	0,05617	0,05641
$m_B^{(\eta)}$	-0,10444	-0,10536	-0,10583
$m_C^{(\xi)}$	-0,05910	-0,05937	-0,06011

Четвертая задача- прямоугольная ортотропная плита, у которой три стороны шарнирно оперты, одна сторона свободна от закрепленной. Вдоль оси симметрии плита загружена равномерно распределенной полосовой вибрационной нагрузкой (рис.4.3) :

$$\Delta q_{ij}^{(\xi)} = \sin(1,6 \cdot \pi^2 \cdot k\tau). \quad (4.2.1)$$

где k - номер рассматриваемого временного слоя; τ - постоянный шаг по безразмерной оси времени \bar{t} .

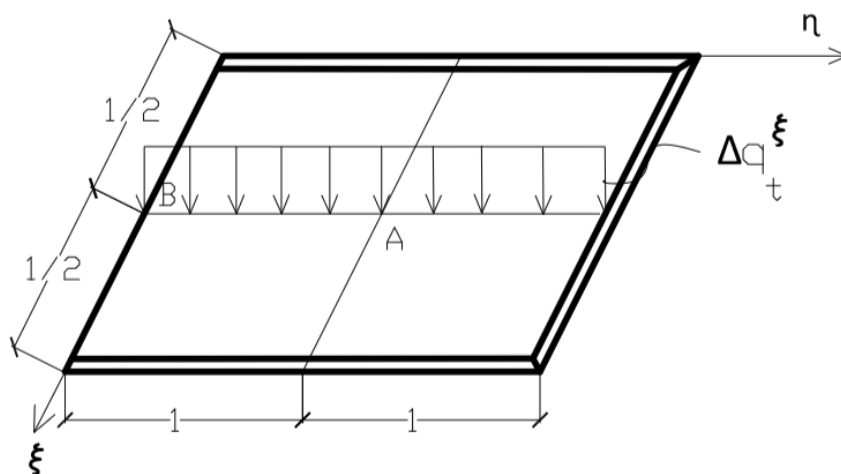


Рис. 4.3

В табл.4.10 даются результаты для наибольших по времени значений безразмерных прогибов и изгибающих моментов в точке А, полученные при $\bar{C} = 0$ (верхние значения) и при $\bar{C} = 1,5$ (нижние). На рис 4.4 показано изменение во времени значений $w_B^{(\xi)}$ - (1-ая кривая), полученные при $\bar{C} = 0$.

Табл.4.10

n	1/12	1/16	1/18
τ	$\frac{1}{\pi^2 64}$	$\frac{1}{\pi^2 100}$	$\frac{1}{\pi^2 150}$
w_A	$\frac{0,017333}{0,015896}$	$\frac{0,009255}{0,008641}$	$\frac{0,009255}{0,008641}$
$m_A^{(\xi)}$	$\frac{0,07300}{0,07133}$	$\frac{0,07220}{0,07089}$	$\frac{0,07178}{0,07065}$
$m_A^{(\eta)}$	$\frac{0,05978}{0,06318}$	$\frac{0,05836}{0,06227}$	$\frac{0,05750}{0,06155}$

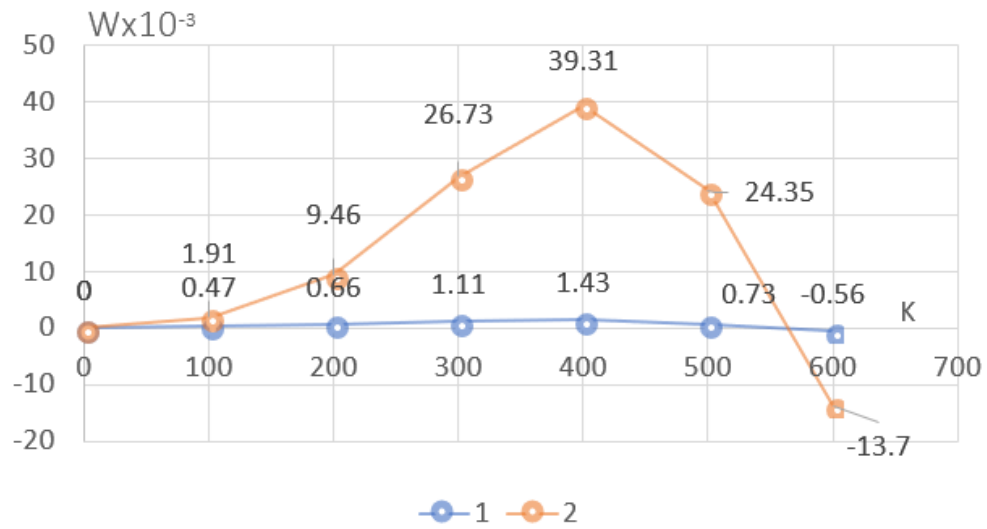


Рис.4.4

На рис. 4.5 значение w_B, m_B^{ε} даются с учетом затухания $\bar{C} = 1,5$.

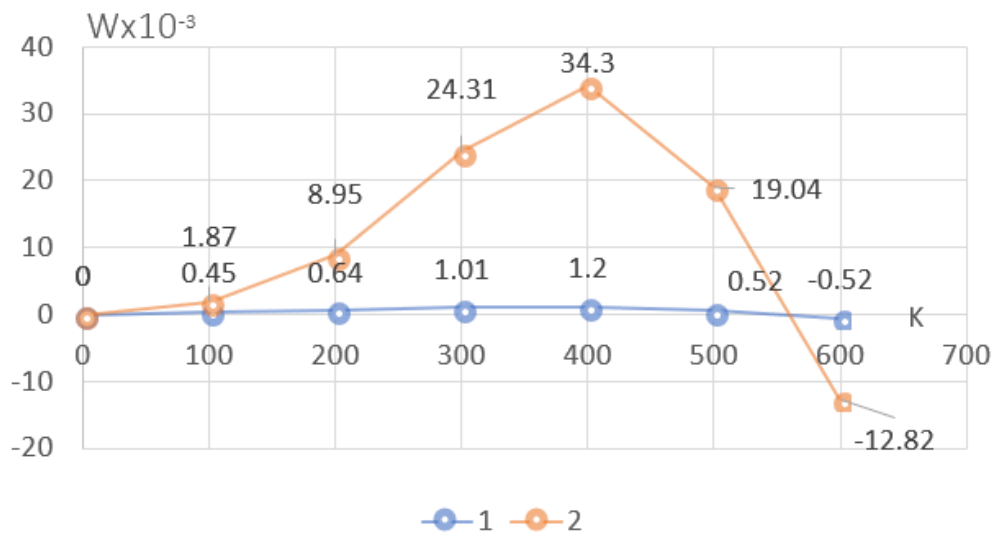


Рис.4.5

Выводы по главе 4.

Для апробации полученного в третьей главе алгоритма и написанной на его основе программы в первом параграфе четвертой главы были решены тестовые примеры по расчету изотропных пластин на динамические нагрузки. На трех вложенных одна в другую сетках исследовалась сходимость решения. Кроме того, сравнение полученных результатов с ранее известными показало их практическое совпадение и выявило высокую точность разработанной методики.

Во втором параграфе четвертой главы опубликованы результаты расчета новых задач, а именно задач по расчету ортотропных пластин на динамические нагрузки.

Составленная нами программа позволяет рассчитать ортотропные плиты с любой комбинацией краевых условий на произвольные динамические нагрузки.

Заключение

1. Разработана численная методика расчета ортотропных пластин на свободные и вынужденные колебания с привлечением разностной формы метода последовательных аппроксимаций.
2. Предложены алгоритмы расчета и составлены программы для ЭВМ по расчету ортотропных пластин на свободные и вынужденные колебания.
3. В качестве тестовых рассмотрены задачи поперечных колебаний изотропных пластин, как частного случая ортотропных. Вычисления выполнены с использованием указанных выше программ по расчету ортотропных пластин. Численное исследование сходимости решений, а также сравнение полученных нами результатов с известными, опубликованными ранее, продемонстрировало высокую точность и надежность вычислительных алгоритмов и составленных по ним программ.
4. С использованием предложенных программ получены решения новых задач по расчету ортотропных пластин с различными условиями опирания на динамические нагрузки. В качестве внешнего воздействия рассмотрены импульсные и гармонические нагрузки, полосовые и распределенные по площади.
5. Перспективным направлением развития настоящей работы является разработка численной методики расчета ортотропных пластин на динамическое воздействие с учетом действия продольных сил в срединной плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аголюян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Физматгиз. 1997. 414 с.
2. Аголюян Л.А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин. Проблемы механики тонких деформируемых тел: Сборник: Ин-т мех. НАН Армении. Ереван: Гитутюн. 2002, с. 9-19.
3. Азиков Н.С. Исследование устойчивости и закритического поведения анизотропных пластин при сдвиге. Изв. АН. Мех. Тверд. Тела 1993, №2, с. 183-189.
4. Акопян А.С. О численном решении задач устойчивости и свободных колебаний анизотропных пластин переменной толщины. Изв. Нац. АН Армении. Мех. 1997.50, №1. С. 34-43
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987.-360 с.
6. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Изв. Наука, 1974, 448 с.
7. Андреев А.Н. Фундаментальное решение неклассических дифференциальных уравнений изгиба трансверсально изотропной пластинки. Числительные методы решения задач теории упругости и пластичности.: Тр. 13. Межресп. Конф, Новосибирск, 22-24 июня, 1995. Новосибирск, 1995. С. 13-19.
8. Аркания З.В. , Трещев А.А. Изгиб пластин из материалов, обладающих анизотропией двоякого рода. \Дифференц. уравнения и прикл. задачи. Тул. гос. техн. ун-т. Тула. 1994.с. 18-27.
9. Бате К, Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов; перевод с англ.-М., Строй из даб, 1982. 447 с.
10. Батов П.А. Оценка пределов применимости технической теории анизотропных пластин в задачах устойчивости. Автореферат дисс. на соискание уч. степ. канд. физ.-мат. наук. Тул.Гос. ун-т. Тула 2002., 20 с.

11. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычисления. т. II-М.: Физматгиз, 1960, 620 с.
12. Блейх Ф., Мелан Е. Управления в конечных разностях статистики сооружений.- Гос. научн.- техн. изд. Украины, 1936, 382 с.
13. Большакова Н.И Интегрирование дифференциального уравнения изгиба ортотропной панели при неравномерном сжатии. Основания и фонд. в геол. условиях Урала. Перм. Гос. техн. ун-т. Пермь. 1995. с. 100-106.
14. Брусникин В.Н. О точности решения разностных уравнений, описывающих поведение пластинки, находящейся под динамическим воздействием. Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1999.39, №2 с. 323-331.
15. Бубнов И.Г. Труды по теории пластин.- М.: Гостехиздат, 1953, 154 с.
16. Бузун И. М. Метод конечных разностей и метод конечных элементов. Сравнение решений для пластин.- Тр. Тюменского индустр. ин-та, 1974, в. 40, с. 79-87.
17. Бурмистров Е.Ф, Маслов Н.М. Изгиб круглой ортотропной пластинки переменной жесткости.- сб. научных тр. «Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений твердых тел», вып. 4, Изд-во Саратовского ун-та, 1969, с.123-134.
18. Вайнберг Д.В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин.- К.: Будивельник, 1973, 488 с.
19. Варвак П.М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластин.- Тр. ин-та строит механики АН УССР, 1949, ч. I-136 с., ч. II-115 с.
20. Варданын Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности.-М.: Изд. АСВ, 1995, 568 с.
21. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании.- М.: Физматгиз, 1960, 491 с.

22. Габбасов Р.Ф., Габбасов А.Р., Филатов В.В. Численное построение разрывных решений задач строительной механики – Изд-во АСВ, 2008, 277с.
23. Габбасов Р.Ф., Уварова Н.Б. Расчет плит на локальные нагрузки численным методом последовательных аппроксимаций.- В. кн. Расчет пространственных конструкций.- СБ. тр. МИСИ, 1981, №157, с.23-34.
24. Габбасов Р.Ф. О разностных уравнениях в задачах и устойчивости плит.- Прикладная механика, 1982, т. 18, №9, с. 63-67.
25. Габбасов Р.Ф. Численное решение задач строительной механики с разрывными параметрами. Дисс.на соискание уч. Степени докт. Техн. Наук.-М., МИСИ, 1989, 343 с.
26. Габбасов Р.Ф., Низомов Д.Н. Численное решение некоторых динамических задач строительной механики.-строит.мех и расчет сооруж., 1985, №6, с. 51-54.
27. Габбасов Р.Ф., Чан Тхань Тунг. Рациональный численный метод расчета арок произвольного очертания . – Вестник МГСУ, 2010, № 4, с. 18-23.
28. Габбасов Р.Ф., Као З.Б. Расчет сжато-изогнутых ортотропных пластин методом последовательных аппроксимаций. – Вестник МГСУ, 2010, № 4, с. 47-51.
29. Габбасов Р.Ф., Филатов В.В. Расчет составных пластин на продольно поперечный изгиб. Сборник докладов НТК ППС ИСА 2010, с. 222-225.
30. Габбасов Р.Ф., Филатов В.В. К расчету составных пластин на упругом основании. – Международная научно-практическая конференция «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы. Посвящена 100-летию со дня рождения Б.Г.Коренева» 17.11.2010, с. 96-100.
31. Габбасов Р.Ф., Филатов В.В. Расчет сжато-изогнутых плит с использованием разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций (МПА): Методические указания.- М.: МГСУ, 2003, 40 с.

32. Габбасов Р.Ф., Филатов В.В. Расчет неразрезных составных пластин. – Дефекты зданий и сооружений. Усиление строительных конструкций. Материалы XV научно-методической конференции ВИТИ посвященной памяти В.Т. Гроздова (24 марта 2011)/ ВИТИ. – СПб., 2011, с. 153-157.
33. Габбасов Р.Ф., Филатов В.В. Численный метод расчета составных пластин с учетом трещинообразования. – Международная научно-практическая конференция «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы. Посвящена 100-летию со дня рождения А.Р.Ржаницына» 29.07.2011, с. 116-119.
34. Габбасов Р.Ф., Уварова Н.Б., Филатов В.В. Расчет балок на упругом основании с двумя коэффициентами постели. – Вестник МГСУ, 2012, № 2, с. 25-29.
35. Габбасов Р.Ф., Уварова Н.Б. Применение обобщенных уравнений метода конечных разностей к расчету плит на упругом основании. – Вестник МГСУ, 2012, № 4, с. 32-38.
36. Габбасов Р.Ф., Уварова Н.Б., Филатов В.В. К расчету оболочек вращения в упруго-вязкой среде. – Научное обозрение, 2013, № 11, с. 105-108.
37. Габбасов Р.Ф., Филатов В.В., Хоанг Т.А. Приближенный способ расчета изгибаемых пластин средней толщины со свободным от закреплений краем. – Вестник гражданских инженеров, 2014, № 3, с. 96-98.
38. Габбасов Р.Ф., Филатов В.В. Численный метод расчета составных стержней пластин с абсолютно жесткими поперечными связями. – Изд-во АСВ, 2014, 200с.
39. Габбасов Р.Ф., Хоанг Т.А., Нгуен Х.А. Сравнение результатов расчета тонких изгибаемых плит с использованием обобщенных уравнений метода конечных разностей и последовательных аппроксимаций. – Промышленное и гражданское строительство, 2014, № 1, с. 62-64.

40. Габбасов Р.Ф., Хоанг Т.А., Шикунов М.А. Обобщенные уравнения метода конечных разностей в задачах расчета тонких изгибаемых плит на динамические нагрузки. – Вестник МГСУ, 2014, № 9, с. 32-38.
41. Габбасов Р.Ф., Хоанг Т.А. Расчет изгибаемых плит средней толщины с использованием обобщенных уравнений метода конечных разностей. – Промышленное и гражданское строительство, 2014, № 10, с. 52-54.
42. Габбасов Р.Ф., Хоанг Т.А., Липатова О.Н., Уварова Н.Б. Расчет круглых плит постоянной жесткости на локальные нагрузки. – Промышленное и гражданское строительство, 2015, № 3, с. 25-28.
43. Габбасов Р.Ф., Уварова Н.Б., Александровский М.В. Численное решение задачи по определению частот и форм собственных колебаний изотропных плит. – Естественные и технические науки, 2015 № 4, с. 14-17.
44. Габбасов Р.Ф., Нгуен Х.А., Журавлева Е.Н., Хоанг Т.А. Численное решение циклически симметричной задачи по расчету сферической оболочки. – Промышленное и гражданское строительство, 2015, № 5, с. 30-32.
45. Габбасов Р.Ф., Нгуен Х.А., Журавлева Е.Н. Численное решение циклически симметричной задачи по расчету круговой цилиндрической оболочки. – Промышленное и гражданское строительство, 2015, № 6, с. 33-35.
46. Габбасов Р.Ф., Уварова Н.Б., Александровский М.В. Численное решение задачи о собственных колебаниях изгибаемых ортотропных пластин. – Промышленное и гражданское строительство.
47. Галаси А.А. Об упругом равновесии полубесконечной анизотропной пластины с подкрепленным краем.- Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., №3, 1960, с. 43-48.
48. Галеркин Б.Г. Упругие тонкие плиты.- М.: Гостехиздат, 1933, 371 с.
49. Геворкян Г.З. Свободные поперечные колебания прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов. Изв. АН Армении. Мех. 2002.55, №1. с. 55-61. Библ.4.

50. Геворкян Г.З. Задача определения собственных частот поперечных колебаний прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов и инерции вращения. Изв. АН Армении. Мех. 2003.56, №1. с. 26-30. Библ.4.
51. Глазунова Н.Т. К расчету ортотропных пластин трапецеидального профиля.- Тр. Новочерк. политехн. ин-та, т. 104, 1959. с. 75-86.
52. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластин и оболочек. Киев.: Наук.дука, 1964, 288 с.
53. Григорян Э.Х. О задачах собственных колебаний и устойчивости анизотропных (неортотропных) пластин и оболочек. Изв. АН Армении, Мех. 2001.54, №4. с. 3-11. Библ.2.
54. Гурьянов И.Н., Гурьянова Г.Б. Метод разрывных решений и задач изгиба анизотропных пластин сложной формы. Математическое моделирование и краевые задачи. Труды. 8-ой Научной межвузовской конференции. Секция «Математические модели механики, прочности и надежности конструкции». Ч.1. Самара: Изд-во. СамГТУ. 1998,. с. 37-38.
55. Динник А.Н. Избранные труды, т.2. Изд-во АН СССР, 1955, 233 с.
56. Длугач М.И. Некоторые вопросы применения метода сеток к расчету пластин и оболочек.-М.: Стройиздат, 1966, с.555-560.
57. Емельянов М.Д. Приближенная оценка устойчивости ортотропных пластин. Ленинград, Судостроение, 1991, №2, с. 11-14.
58. Еникеев И.И. К теории изгиба неоднородной анизотропной тонкой плиты несимметричного строения.- Тр. Казанского с.-х. ин-та, вып. 42, 1959.
59. Жемочкин Б.Н., Сеницин А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании.- М.: Госстройиздат, 1962, 240 с.
60. Захаров К.В. К вопросу о приближенном решении задачи об изгибе ортотропной полосы.- Научно-техн. информ.бюлл. Ленингр. политех. ин-та, №1-2, 1958, с. 187-192.

61. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в механике. Перев. С англ. М.: Мир, 1975, 541 с.
62. Золотов А.Б., Коренева Е.Б., Сидоров В.Н и др. Методические указания к выполнению лабораторных работ по информатике для студентов II курса.
63. Иванов С.А. Анализ изгибаемых пластинок методом конечного элемента.- Тр. МарХИ, 1972, в. 4, 27-31.
64. Казей С.И. Динамика оболочек вращения в упругой среде. Дисс. на соискание уч. ст. канд. техн. наук, 1977, М.: МИСИ, 124 с.
65. Калманок А.С. Строительная механика пластинок.- Машстройиздат, 1950.
66. Караманский Т.Д. Численные методы строительной механики, перев. с болг.-М.: Стройиздат, 1981, 436 с.
67. Киселев В.А. Расчет пластин.- М.: Стройиздат, 1973.151 с.
68. Китовер К.А. Применение степенных полиномов к решению задач об изгибе ортотропных плит.-Сб. «Расчет пространственных конструкций», вып.5, Госстройиздат, 1959.
69. Китовер К.А. Об упругом равновесии тонких бесконечных пластинок из ортотропного материала.- Инж. сборник, 30. 1960, с. 85-98.
70. Климов С.А. К расчету конструктивно ортотропных пластинок на изгиб.-Сб. «Материалы по металл. конструкциям», вып.8, Стройиздат, 1964, с. 116-152.
71. Коваленко А.Д. Круглые пластины переменной толщины.- М.: Физматгиз, 1959, 294 с.
72. Колмогоров Г.Л., Кулиев В.Р. Нелинейное поведение анизотропных пластин при изгибе. Вестник ПГТУ. Мех. 1999. №2. с. 186-192.
73. Корнев В.М., Мулькибаев А.О. Асимптотический анализ задач о свободных колебаниях прямоугольных трансверсально-изотропных и треслоидных пластин. Прикл. мех. и техн. физ. 1992. №4. с. 110-124.

74. Кочатюрк Т., Алтинас Т. Определение установившейся реакции вязкоупругих точечно-онертых прямоугольных ортотропных пластин. *Мех. композит. материалов.*, 2003, 39, №5. с.681-696.
75. Крычко А.В. Сложные колебания гибких ортотропных пластинок при действии ударных нагрузок. Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. 12 Межвузовской конференции. Ч.1. Секц. Математические модели механики, прочность и надежность конструкций. Самара : Изд-во СамГТУ, 2002. с. 99-101.
76. Лащеников Б.Я. К расчету ортотропных систем методом перемещения Тр. МИИТ, 1971, вып. 364.
77. Леонтьев Н.Н., Леонтьев А.Н., Соболев Д.Н., Травуш В.И. Аналитические численные методы расчета прямоугольных пластинок.- М.: МИСИ, 1986, 88 с.
78. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластины.- М.-Л.: Гостехиздат, 1947, 355 с.
79. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.- М.: Наука, 1977, 416 с.
80. Лобкова Н.А., Ильин А.А. К теории тонких неоднородных пластин.- *Прикладная механика*, т.1, №8, 1965.
81. Локшин А.З. Влияние поперечного сдвига на устойчивость ортотропных пластин. Статика, динамика и прочн. судов. конструкций. Ленингр. кораблестроит. ин-т. Л 1990. С. 28-36.
82. Лопатин А.В. Устойчивость композитой ортотропной пластины при неравномерном сжатию и изгибе. Изв. РАН. Мех. тверд. тела . (Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела.) 1998, №3. с. 98-103.
83. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на Фортране. Перев. с англ.-М.: Мир, 1977, 584 с.
84. Маркус Г. Теория упругой сетки и ее применение к расчету плит и безбалочных перекрытий.- ОНТИ, 1936, 444 с.
85. Мартынович Т.Л., Мартынович Б.Т., Куценко О.В. Собственные поперечные колебания тонкой анизотропной пластины, два противоположных края которой

неподвижно закреплены, а два другие- свободно оперы. Нац. ун-т «Львов, политехн.» Львов, 2003, с.11. Укр. Деп. в ГНТБ Украины 17.06.2003, №84-Ук.2003.

86. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем.-М.: Наука, 1979, 320 с.

87. Масленников А.М. Расчет тонких плит методом конечных элементов.-Тр. ЛИСИ, 1968, №57, с. 186-193.

88. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами. Учебн. Пособие.- Изд-во Ленинград. ур-та, 1987, 224 с.

89. Маслов Н.М. Изгиб круглой ортотропной пластинки переменной толщины.- Прикладная механика, 1965, т.1, вып.2, с. 67-73.

90. Матвеев К.А. Разработка и развитие вариационных методов исследования устойчивости анизотропных пластин. Автореферат дисс. на соиск. уч. ст. докт. техн. наук. Новос. гос. техн. ун-т. Новосибирск, 2002.

91. Мейги В.Ф. Динамическое поведение ортотропной прямоугольной пластины при действии внезапно приложенной нагрузки. Прикл. мех. (Киев). 1996.32, №3. с. 73-79.

92. Мельников Л.А. Теоретическое и экспериментальное исследование работы железобетонных плит, опертых по контуру.- Прикладная механика, 9, №5, 1963, 505 с.

93. Михайлов Б.К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами.- Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1980, 196 с.

94. Мусса Сали . Расчет балок и плит переменной жесткости на динамические воздействия. Дисс. канд., М.: МГСУ, 2002, 147 с.

95. Нескородев Н.М., Профатило Л.Н. Установившиеся поперечные колебания тонких анизотропных плит. Донец. гос. ун-т. Донецк. 1996. 15с. Деп в ГНТБ Украины 10.09.96, № 1805- Ук96.

96. Нумеров Б. В., “Метод экстраполирования в применении к численному интегрированию линейных дифференциальных уравнений второго порядка”, Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук, 1932, № 1, 1–8.
97. Нурмаганбетов Е.К., Касимов Г.Г. Поперечные колебания ортотропных плит при различных контурных условиях. Эксперим. и теор. исслед. строит. конструкций: матер. докл. 20 научн.- техн. конф.: СБ. научн. тр. Центр. н-и. И
98. Нурмаганбетов Е.К. Применение метода декомпозиции к определению свободных поперечных колебаний прямоугольных ортотропных плит с упругим контуром. Строит. мех. и расч. сооруж. 1997, №1, с. 55-57.
99. Оганесян Л.А. Численный расчет плит. Решение инженерных задач на ЭВМ.-Л., 1963, с. 84-97.
100. Огибалов П.М. изгиб, устойчивость и колебания пластинок.-М.: Изд-во МГУ, 1958, 389 с.
101. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины.-М.: изд-во МГУ, 1969, 695 с.
102. Пештмалджян Д.В. Об изгибе ортотропных пластинок.- ДАН Арм. ССР, 32, №1, 1961, с. 17-21.
103. Плеханов А.В. Об уточнении напряженного состояния анизотропных пластин. Изв.вузов.Стр-во.1997, №3.с.19-23.
104. Понятовский В.В. К теории изгиба анизотропных пластинок.-ПММ, 1964, т. 28, в. 6, с. 1033-1039.
105. Проценко А.М., Лосин Н.А. Решение задачи об изгибе железобетонных плит.- Строит. механика и расчет сооружений, 1979, №6, с. 35-38.
106. Пшеничников Г.И., Скориков А.В. Свободные колебания ортотропной прямоугольной плиты с упругим контуром. Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1992, №2. с. 166-169.

107. Рабинович И.М., Сеницын А.П., Лужин О.В., Теренин В.М. Расчет сооружений на импульсивные воздействия,- М.: Стройиздат, 1970-304 с.
108. Радионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб: Изд-во гос. ун-та, 1996. 278 с.
109. Розин Л.А. Метод расчленения в теории оболочек.-ПММ, 1961, т. XXV, в. 5, с. 921-926.
110. Рыскин В.Я. Численный метод расчета сжато-изогнутых стержней и пластин на динамические нагрузки. Дисс. канд., М.: МИССИ, 1993, 150 с.
111. Саакян Л.С. Об оптимальном управлении колебаниями ортотропной прямоугольной пластины при условии минимума ее полной энергии. Изв. АН Армении. Мех. 1993.46, №1-2. с. 18-25.
112. Сидоров В.Н. Лекции по сопротивлению материалов и теории упругости.- М., 2002, 352 с.
113. Слободянский М.Г. Оценка погрешностей приближенных решений линейных задач.- ПММ, XVII, вып 2, 1953.
114. Смирнов В.А. Численный метод расчета ортотропных пластин.- Исследования по теории сооружений, вып. XVIII, М.: Стройиздат, 1970, с.
115. Смирнов В.А. Изгиб ортотропной пластины при действии поперечной и продольной нагрузок.- Исследования по теории сооружений, вып XIX, М.: Госстройиздат, 1972, с. 54-69.
116. Смирнов В.А. Расчет пластин сложного очертания.- М.: Стройиздат, 1978, 300 с.
117. Соломон. Применение метода последовательных аппроксимаций и расчету ортотропных изгибаемых пластин. Дисс. на соиск. уч. сбенси. канд. техн. наук, М., МГСУ, 2004, 102 с.
118. Справочник по динамике сооружений, под. ред. Коренева Б.Г. и Рабиновича И.М.-М.: Стройиздат, 1972-511 с.

119. Тагиев И.Г., Гусейнов О.М., Разаев О.Г. Определение частот свободных колебаний прямоугольных ортотропных плит методом декомпозиции. Гянджин. гос. пед. ин-т. Гянджа, 1992. 8с. Деп. в АзНИИНТИ 11.02.92, 1760-Аз92.
120. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки, перев с англ.-М.: Наука, 1966, 635 с.
121. Тотиков И.С. Об устойчивости ортотропных пластин. Сев.- Осет. ун-т, Сев.-Кавк. горнометалл. ин-т. 1988, 7 с. Рук. деп. в ВИНТИ 24.06.88. Деп. от №5046-В88.
122. Травуш В.И. Изгиб четверть бесконечной плиты, лежащей на упругом основании.- Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1971, №2, с.69-73.
123. Трушин С.И. Определение собственных частот и форм колебаний пластин из композитного материала методом итераций в подпространстве. Вестник Рос. ун-та дружбы народов. Сер. Инж исслед. 2002, №1, с. 102-106.
124. Трянин И.И. Сложный изгиб ортотропной прямоугольной пластинки, жестко заделанной по контуру.- Прикладная механика, 10, №2, 1964, 130 с.
125. Хемминг Р.В. Численные методы. Перев. с англ.- М.: Наука, 1972, 400с.
126. Чернышев Г.Н. О действии сосредоточенной силы и сосредоточенного момента на анизотропную пластину.- Инж. Журнал, 4, №1, 1964.
127. Шапошников Н.Н. Расчет пластинок на изгиб по методу конечного элемента.- Тр. МИИТ, 1968, в. 260, с. 134-144.
128. Шапошников Н.Н., Волков А.С. Расчет пластинок и коробчатых конструкций методом конечных элементов. Исследования по теории сооружений, 1976, в XVII-М.: Стройиздат, с.134-146.
129. Якубов А.Х. Метод дробных шагов при расчете ортотропных пластин. Научно-технический калейдоскоп. 2001, №3. с. 44-49.
130. Ahmadian M.T., Zandeneh M.,Sherafati. Vibration analysis of orthotropic rectangular plates using superelements. Comput. Meth. Appl Mech. and Eng. 2002.191, №19-20. с. 2069-2075.

131. Blesgen Donald A., Pardoen Gerard C. Analytical and experimental modal analysis of orthotropic plate-type structures. «Proc.4th Int. Modal Anal. Conf., Los Angeles, Calif., Febr. 3-6, 1986.Vol.1». Schenectady, N.Y., 1986, c. 754-759.
132. Deobald Lyle R., Gibson Ronald F. Determination of elastic constants of orthotropic plates by a modal analysis Rayleigh-Ritz technique. «Proc. 4th Int. Modal Anal. Conf., Los Angeles, Calif., Febr. 3-6, 1986.Vol.1». Schenectady, N. Y., 1986, c. 682-690.
133. Federhofer K. Knickung der Kreisplatte und Kreispingplatte mit veränderlicher Dicke.-Ing. Archiv,-1940, s.224-238.
134. Gilg B.Experimentelle und theoretische Untersuchungen an dünner Platten, Zurich, 1952.
135. Gorman D.J. Accurate free vibration analysis of the orthotropic cantilever plate. Sound and Vibration. 1995. 181, №4. c. 605-618.
136. Happel H. Über das Gleichgewicht von elastischen Platten unter einer Einzellast.- Mathematische Zeitschrift, Bd 6, 1920, s. 209-218.
137. Hertz H. Über das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten.- Annalen Physik und Chemie, Bd.7, 1884, Jeipzig, s. 449-455.
138. Heck O., Ebner. Tafeln und Berechnungen für die Festigkeit von Platten und Schalen Konstruktionen im Flugzeugbau. Luftfahrtforschung, 1935, B.11, №8.
139. Huber M.T. Einige Anwendungen der Biegetheorie orthotroper Platten.- Zeitschrift f. Angew. Math. u.Mech., 1926, B.6, H.3.
140. Huber M.T. Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten.- Warszawa, 1929.
141. Jayaraman G., Chen P., Snyder V.W. Free vibration of rectangular orthotropic plates with a pair of parallel edges simply supported. Comput. and Strut. 1990.34, №2. c. 203-214.
142. Jeitz H. zur Anisotropie kreuzweise bewehrten Betons.- Zeitschrift f. Angew. Math. und Mech., 1926, B.6, H.3.

143. Marcus G. Theore und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke, Budepest, Academiai Kiado, 1967, s. 598.
144. Mkrtchan H.P. Lokalized bending waves in at elastic ortkotropic plate. Изв. АН Арм. Мех. 2003, 56, №4, с. 66-68.
145. Morita C., Marsada H., Sakiyama T., Hagino T. A free vibration analysis of anisotropic rectangular plates with various boundary conditions. J. Sound and Vibr. 1995.181, №5. с. 757-770.
146. Olsson G.R. Biegung der Rechteckplatte bei linear veranderlicher Biegungs-Steifigkeit, Jng.-Arch., 5, 1934, 363 s.
147. Pasternak P. Die Baustatische Theorie biegefechter Balken und Platten auf elastischer Bettung.-Beton und Eisen, 1926, №9. s. 163-172.
148. Pichler O. Die Biegung Kreissymmetrischer Platten von veranderlicher Dicke.-Berlin, 1928-609.
149. Sakata T., Hosokawa K. Vibration of clamped orthotropic rectangular plates. Sound and Vibr. 1988.125, №3. с. 429-439.
150. Seydel. E. Über das Ausbeulen von rechteckigen isotropen oder orthogonal-anisotropen Platten bei Schubbeanspruchung.-Jng. Archiv, 1933, t4, №2.
151. Tang Wei-Yu, Sridharan Srinivasen. Buckling analysis of anisotropic plates using perturbation technique. J. Eng. Mech. 1990.116, №10. с. 2206-2222.
152. Tung T.K., Surdenas J. Buckling of rectangular orthotropic plates under biaxial loading. J. Compos. Mater., 1987.21., №2. с. 124-128.
153. Winkler E. Die Lehrne von der Elastizitat und Festigkeit, praga, 1867, 388 c.
154. Wolf K. Ausbreitung der Kraft in der Halbebene und in Halbraum bei anisotropem Material.-Zeitsch. f. Angew. Math. und. Mech. 1935, B. 15, H.5.
155. Zinkiewicz O. Finite Element Method-from intuition to generality.-Appl. Mech. Reviews, 1970, p. 249-256.