

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Ушаков Андрей Юрьевич

**РАСЧЕТ СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК И РЕШЕНИЕ  
ЗАДАЧИ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.**

05.23.17 –Строительная механика

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
кандидат технических наук, профессор  
Ванюшенков Михаил Григорьевич

Москва - 2017 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.	5
ГЛАВА 1. МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ В ВИДЕ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ.	12
1.1. Краткий исторический обзор работ, посвященных развитию метода начальных функций.	12
1.2. Однородные решения и их использование для удовлетворения краевых условий в задачах теории упругости.	20
ГЛАВА 2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СЖАТО - ИЗОГНУТЫХ ПЛАСТИНОК И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНКИ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.	29
2.1 Построение матрицы начальных функций.	29
2.2 Учет внешних воздействий.	35
2.3 Нахождение начальных функций из граничных условий на продольных сторонах пластинки, параллельных начальной линии.	38
2.4 Соотношение обобщенной ортогональности однородных решений и его использование для удовлетворения граничных условий на поперечных сторонах сжато-изогнутой пластинки.	47
2.4.1 Случай, когда граничные условия могут быть удовлетворены точно.	47
2.4.2 Приближенное удовлетворение граничным условиям методом сил и методом перемещений.	52
2.5. Решение задачи устойчивости пластинки методом начальных функций (нахождение критических нагрузок и форм потери устойчивости сжатых пластинок).	54
ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ РАСЧЕТА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СЖАТЫХ И СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ ПЛАСТИНОК С РАЗЛИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ	

ОПИРАНИЯ ПО КОНТУРУ И РАЗЛИЧНЫМИ ЗАГРУЖЕНИЯМИ.	58
3.1 Примеры расчета на устойчивость равномерно сжатой в срединной плоскости пластинки.	58
3.1.1 Пластинка, шарнирно опертая по контуру.	58
3.1.2 Пластинка, шарнирно опертая по трем сторонам, одна сторона свободна.	64
3.1.3 Пластинка, шарнирно опертая по двум сторонам, одна сторона свободна и одна сторона жестко защемлена.	68
3.1.4 Пластинка, шарнирно опертая по двум сторонам и по двум жестко защемлена.	72
3.1.5 Пластинка, шарнирно опертая по двум сторонам и две стороны свободны.	76
3.1.6 Пластинка, жестко защемлена по трем сторонам и одна сторона свободна.	80
3.1.7 Пластинка, шарнирно опертая по двум взаимно перпендикулярным сторонам, две стороны свободны.	88
3.2 Примеры расчета прямоугольной сжато-изогнутой пластинки.	95
3.2.1. Изгиб пластинки, жестко защемленной по одной продольной стороне и второй свободной, две поперечные стороны шарнирно оперты.	95
3.2.2 Сжато-изогнутая пластинка с граничными условиями, рассмотренными в примере 3.2.1.	99
3.2.3. Изгиб пластинки, жестко защемленной по трем сторонам, и одна сторона свободна.	102
3.2.4 Сжато-изогнутая пластинка с граничными условиями, рассмотренными в примере 3.2.3.	108
ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С РАЗЛИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ВДОЛЬ ОДНОЙ СТОРОНЫ.	114

4.1 Расчет сжато-изогнутой пластинки с различными граничными условиями вдоль одного края.	114
4.2 Примеры расчета на устойчивость сжатой в срединной плоскости пластинки, имеющей различные граничные условия вдоль одного края.	124
ГЛАВА 5. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ С ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ANSYS Mechanical 14.5.	132
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.	143
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.	145

## ВВЕДЕНИЕ

Актуальной задачей, имеющей большое значение на стадии проектирования строительных конструкций, является совершенствование методов расчета. Это связано с возрастающими требованиями к снижению материалоемкости сооружений и повышению надежности конструкций.

Решению этих проблем способствует дальнейшее развитие таких методов расчета, которые позволяют достаточно точно и полно учитывать особенности реальной работы конструкции, обладают высокой точностью и позволяют эффективно использовать вычислительную технику.

В настоящее время существует много эффективных методов расчета, как численных, так и аналитических. Многие из них, такие, как метод суперпозиции, метод интегральных преобразований, метод однородных решений, метод конечных разностей, метод конечных элементов, широко применяются в расчетной и исследовательской практике. Тем не менее, признается актуальным разработка способов построения математических моделей и развитие методов расчета для исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов конструкции с усложненной структурой при различных статических, динамических, температурных и других воздействиях.

При этом особое значение придается аналитическим методам, ориентированным на использование ЭВМ. Аналитические решения, получаемые для относительно простых элементов конструкций, позволяют исследовать все особенности НДС, благодаря чему накапливается та сумма знаний, которая дает возможность для понимания закономерностей НДС более сложных конструкций. Кроме этого, аналитические методы незаменимы, когда остро стоит вопрос об экономии машинного времени, повышении точности вычислений.

В этой связи метод начальных функций (МНФ), принадлежащий к аналитическому методу теории упругости и строительной механики, предложенный и разработанный в трудах советских ученых А.И.Лурье и В.З.Власова, является одним из наиболее эффективных и перспективных. Он сочетает общность подхода к решению разнообразных задач и ясное

истолкование получаемых математических моделей.

Развитие метода для решения статических и динамических задач, позволяющего в ряде случаев получать точные решения, дает возможность наиболее полно и корректно выявить особенности НДС, что необходимо для принятия рациональных решений.

Решения задачи изгиба пластинки, получаемые этим методом, точно удовлетворяют дифференциальному уравнению, граничным условиям на продольных сторонах пластинки, и позволяют точно или приближенно удовлетворить краевым условиям на ее поперечных сторонах. Операторная форма записи решений удобна для учета различных внешних воздействий. Числовые примеры свидетельствуют о быстрой сходимости получаемых решений почти во всей области.

Вместе с тем, необходимо отметить ряд проблем возникающих при реализации этого метода. Во-первых, собственные функции, входящие в однородное решение задачи метода начальных функций зависят от комплексных корней трансцендентного уравнения, определяемых типом граничных условий, которым эти решения удовлетворяют точно. Они образуют семейство неортогональных функций, что существенно осложняет задачу удовлетворения граничным условиям на поперечных кромках. Во-вторых, вычисления корней трансцендентного уравнения, до недавнего времени, являлось самостоятельным и довольно трудоемким этапом численной реализации метода. В третьих, комплексная форма записи требует выделения ее действительной части, что затрудняет получение числовых результатов.

В настоящее время, вопросы связанные с работой в области комплексных чисел, не являются существенным препятствием к применению метода, в связи с развитием вычислительной техники (программное обеспечение Matlab и Mathcad). А вот вопросы, относящиеся к проблеме разработки рациональных приемов удовлетворения краевым условиям не нашли еще исчерпывающего разрешения.

Решению некоторых аспектов этой проблемы и посвящена наша работа.

Следует отметить, что точное удовлетворение краевым условиям при помощи однородных решений приводит к необходимости получения одновременных разложений двух независимых функций в ряды заданной структуры по собственным функциям рассматриваемой задачи.

Широко известные работы П.Ф.Папковича [106, 107] положили начало применению установленного им замечательного свойства собственных функции, названного в последствии соотношением обобщенной ортогональности. Исследования П.Ф.Папковича были продолжены и получили дальнейшее развитие в работах Г.А.Гринберга, В.К.Прокопова и др.

На кафедре строительной механики МГСУ М.Г.Ванюшенковым были продолжены исследования в области использования особых свойств однородных решений, позволяющие точно или приближенно удовлетворять граничным условиям на поперечных сторонах сжатых и сжато-изогнутых тонких пластинок.

Простота алгоритма и высокая скорость сходимости полученных решений позволяет получить результаты высокой точности при исследовании НДС пластин.

**Актуальность темы.** Из прямоугольных пластин состоит основная доля строительных конструкций – это панели и перекрытия здания, стенки резервуаров и сварных балок, сотовые конструкции и другие. С точки зрения проектирования и внедрения облегченных инженерных конструкций, возникает необходимость обеспечения достаточной прочности и жесткости при наименьших затратах материалов. Решения, получаемые при помощи точных аналитических методов, рассматривают как эталонные, позволяющие оценивать влияние допущений и гипотез, приближенных теорий и служащие тестовыми примерами для численных методов.

**Целью диссертационной работы** является развитие аналитических методов расчета сжато-изогнутых тонких упругих пластин с различными условиями закрепления на краях, а также их статической устойчивости при действии равномерных поперечных и сжимающих нагрузок.

**Научную новизну диссертации** составляют следующие результаты:

- построена новая матрица начальных функций и получено новое свойство обобщенной ортогональности однородных решений для случая изгиба пластинки со свободными от связей кромками при наличии равномерно распределенных сжимающих сил в двух направлениях ее срединной плоскости и различными граничными условиями;

- составлен алгоритм решения задачи устойчивости при действии различных комбинаций сжимающих усилий;

- разработан алгоритм расчета сжато-изогнутых пластин с различными однородными граничными условиями;

- разработан алгоритм расчета сжато-изогнутых пластинок и их устойчивости при комбинированных способах закрепления вдоль одного края;

- получены аналитические решения, которые можно использовать в качестве эталонных при тестировании численных методов расчета (методы конечных разностей, граничных элементов, конечных элементов и т.д.).

- составлен текст макроса с пояснениями для сопоставления полученных результатов расчета в программном комплексе ANSYS Mechanical 14.5.

**Достоверность** полученных результатов подтверждается численными методами расчета по устойчивости и исследования НДС сжато-изогнутых пластин, полученных методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS Mechanical 14.5.

**Практическая ценность** работы заключается в:

- возможности использования разработанных методов расчета в расчетной практике проектно-конструкторских организаций, научно-производственных объединений и других предприятий при разработке конструкций, элементами которых являются прямоугольные пластины;

- разработке методики расчета пластин на устойчивость при действии сжимающих усилий для применения в расчете реальных элементов конструкций;

- использование в учебном процессе при подготовке специалистов и магистров в МГСУ;

- разработка программы в среде Mathcad (программное средство, среда для



выполнения математических и технических расчетов), для решения задач, сводящихся к плоской задаче теории упругости, используемой при выполнении инженерных расчетов.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались на Международной научной конференции «Интеграция, партнерство и инновации в строительной науке и образовании», на научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава МГСУ, в 2010-2014 г.г., на заседании кафедры строительной механики МГСУ (Москва, 2015).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 6 печатных работ в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов по кандидатским диссертациям. Наименования статей приведены в списке литературы под номерами [22, 141-145].

**Основные результаты диссертационной работы внедрены:** в конструкторско-расчетную практику НИИЖБ им. А.А.Гвоздева АО «НИЦ «Строительство».

**На защиту выносятся:**

- для всех рассмотренных в работе типов однородных решений установлены условия существования и сходимости разложений с коэффициентами;
- разработка алгоритма аналитического решения задачи устойчивости прямоугольных пластин с различными условиями закрепления и комбинациями сжимающих нагрузок;
- разработка алгоритма определения внутренних усилий и перемещений сжато-изогнутых пластинок с различными условиями закрепления и анализ влияния величины продольной силы на НДС;
- разработка алгоритма расчета сжато-изогнутых пластинок и их устойчивости при смешанных граничных условиях закрепления вдоль одного края;
- проверка и сравнение результатов решения задачи устойчивости при действии сжимающих усилий и анализа НДС сжато-изогнутой пластинки.

**Объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и библиографического списка и приложения. Диссертация написана на 156 листах, имеет 53 рисунка и 69 таблиц. Библиографический список состоит из 154 наименований трудов отечественных и зарубежных ученых.

**В первой главе** представлены основные этапы развития метода начальных функций, анализируется современное состояние теории метода и его приложения для расчета тонкостенных систем. Формулируются пути развития и применения МНФ, ставятся проблемы для исследования и определяются способы их решения.

**Во-второй главе,** рассмотрены вопросы разработки приемов, упрощающих задачу удовлетворения граничным условиям на поперечных сторонах пластинки при помощи однородных решений метода начальных функций, а также исследование условий существования и сходимости разложений, коэффициенты которых, могут быть определены при помощи соотношения обобщенной ортогональности при решении задачи устойчивости прямоугольной пластинки с различными условиями закрепления двух ее противоположных кромок.

**В третьей главе** приведена методика расчета и решение тестовых задач с результатами вычислений критических значений равномерно сжимающих нагрузок прямоугольных пластинок с различными условиями опирания и комбинацией приложения продольных усилий. Построены формы потери устойчивости. Кроме того, рассмотрен ряд примеров по расчету сжато-изогнутых прямоугольных пластинок при совместном действии продольных и поперечных сил и произведена оценка влияния величины продольной силы на напряженно-деформированное состояние.

**В четвертой главе** приведены примеры расчет сжато-изогнутой пластинки с различными граничными условиями вдоль одного края. В качестве примера рассмотрена сжато-изогнутая пластинка со смешанными граничными условиями на продольных сторонах. Кроме того рассмотрен алгоритм определения критической сжимающей силы для пластинки часть продольной стороны которой закреплена, другая же шарнирно оперта.

**В пятой главе** проведен сравнительный анализ полученных результатов с

данными, полученными с помощью программного комплекса ANSYS Mechanical 14.5, что позволило оценить эффективность предлагаемой методики и наглядно показало высокую точность при решении задач данного класса.

**В заключении** излагаются выводы и приводятся основные результаты работы.

## ГЛАВА 1. МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ В ВИДЕ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ.

### 1.1 Краткий исторический обзор работ, посвященных развитию метода начальных функций.

Метод начальных функций, как метод решения дифференциальных уравнений в частных производных, был предложен в середине прошлого века российскими учеными А.И.Лурье и В.З.Власовым для решения пространственной задачи теории упругости. Его можно рассматривать как обобщение известного метода начальных параметров, широко применяющегося при решении одномерных задач в строительной механике, в частности, задачи изгиба балки на упругом основании.

В соответствии с методом начальных параметров, как известно, перемещения  $W$ ,  $\varphi$  и усилия  $M$ ,  $Q$  в произвольном сечении балки выражаются как линейная комбинация четырех начальных параметров:  $W_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $M_0$ ,  $Q_0$  и функций влияния. Совокупность 16 функций влияния образует матрицу прямого линейного преобразования начальных параметров в искомые величины:  $W$ ,  $\varphi$ ,  $M$ ,  $Q$ .

При построении решений двумерных и пространственных задач теории упругости методом начальных функций используется эта же идея выражения искомых величин в виде линейной комбинации некоторых операторов, действующих на функции, заданные в каком-либо определенном сечении, принимаемом за начальное. Эти функции выполняют такую же роль, как и начальные параметры, поэтому получили названия начальных функций. В двумерной задаче это функции одной координаты, заданные на начальной линии, в пространственной - функции двух независимых координат, заданные на начальной поверхности (например в цилиндрической системе координат). Операторы, действующие на начальные функции, зависят от одной из координат и являются линейными дифференциальными операторами бесконечно высокого порядка. Поэтому следует отметить, что данный метод, аналогичный по замыслу методу начальных параметров, вместе с тем существенно отличается от него по

используемому им математическому аппарату и объему вычислительной работы. Это и понятно, поскольку метод начальных параметров имеет дело с одномерными задачами теории упругости.

Основные черты метода были сформулированы А.И.Лурье в работе [84], где рассматривалась задача о равновесии плиты переменной толщины, и впервые были получены формулы, выражающие перемещения и напряжения в любой точке пластинки через функции перемещений точек срединной плоскости и их первые производные по переменной  $Z$  (ось  $Z$  перпендикулярна к срединной плоскости).

Исходя из уравнений равновесия в перемещениях, автор указал, что эти формулы могут быть получены, если разыскивать решения в виде рядов, расположенных по степеням расстояния  $Z$  от срединной плоскости, в результате их подстановки в уравнение Ляме и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях  $Z$ . Однако более удобным путем получения окончательных выражений оказался предложенный автором символический метод составления решений дифференциальных уравнений в частных производных. Ниже этот путь построения решений подробно рассмотрен на примере задачи устойчивости пластинки. Здесь отметим лишь, что в результате применения символического метода А.И.Лурье искомые величины, соответствующие двумерной или пространственной задаче, легко могут быть выражены через начальные функции и действующие на них линейные дифференциальные операторы, записанные в замкнутой интегро-дифференциальной (трансцендентной) форме.

В статье [85], посвященной теории толстых плит, А.И.Лурье существенно развил предложенный им метод. Следуя идее, высказанной Н.А.Кильчевским по теории оболочек, в работе [85] автор предложил разыскивать шесть начальных функций из условия равновесия на торцевых поверхностях  $Z=\pm h$  плиты, где считались заданными нормальные и касательные напряжения. Получаемые в результате решения точно удовлетворяют исходным уравнениям и условиям на плоскостях  $Z=\pm h$  толстой плиты. При этом автор большее внимание уделил составлению совокупности частных решений уравнений теории упругости,

оставляющих торцевые поверхности свободным от напряжений. Для обозначения таких решений А.И.Лурье ввел специальный термин - "однородные решения". В дальнейшем это понятие было обобщено на случай отсутствия перемещений, а также на смешанные нулевые граничные условия. Кроме того, автор показал, что частные решения неоднородных уравнений, соответствующие нагрузке, легко получаются, если нагрузка задана полиномом от  $X$ ,  $Y$  и применил полученные решения к исследованию изгиба равномерной нагрузкой толстой круглой плиты.

В широко известной монографии [86] А.И.Лурье, систематизировав свои ранее полученные результаты, значительно углубил и расширил возможности предложенного им метода. Например, показал возможность получения частных решений разрешающих дифференциальных уравнений, когда правая часть (нагрузка) является полигармонической функцией или собственной функцией колебаний мембраны, когда функция нагрузки представлена двойным тригонометрическим рядом или интегралом Фурье для двух переменных, а также рядом Фурье-Бесселя для круговой области.

Следующий этап в развитии МНФ связан с работами В.З.Власова. В 1955 году вышла его работа [33], где автор для решения общей пространственной задачи теории упругости применил смешанный метод. За основные неизвестные были приняты функции перемещений и напряжений на площадках с внешней нормалью, направленной по оси  $Z$ . Их значения на начальной координатной плоскости  $Z=0$  автор назвал начальными основными функциями. Общее решение шести уравнений смешанного метода для слоя, ограниченного плоскостями  $Z=0$  и  $Z=const$  В.З.Власов предложил искать в виде рядов Маклорена по переменной  $Z$ . Это позволило получить общие формулы, выражающие искомые функции через их значения на начальной плоскости (начальные функции) и действующие на эти начальные функции линейные дифференциальные операторы, записанные в виде бесконечных операционных рядов. Формально суммируя операционные ряды, автор приводит вторую возможную форму записи операторов - интегродифференциальную, представленную трансцендентными операционными функциями. Совокупность полученных шести выражений названа В.З.Власовым

прямым линейным преобразованием. При этом автор подробно исследует основные свойства матрицы, составленной из 36 операторов этого преобразования (матрицы начальных функций).

Затем В.З.Власов применил полученные общие решения уравнений теории упругости к расчету плиты постоянной толщины  $2h$ , находящейся под действием симметричной и кососимметричной относительно срединной плоскости нагрузок. Как и в работе [85] А.И.Лурье, здесь автор использовал для определения начальных функций граничные условия на плоскостях  $Z=\pm h$ , предлагая два возможных пути: точный, если использовать трансцендентную форму записи операторов, и приближенный, если использовать конечный отрезок операционного ряда. Применяя усеченные суммы, В.З.Власов показал возможность построения при помощи МНФ приближенных уравнений для расчета толстых плит, а также возможность дальнейшего уточнения существующих теорий расчета пластин.

В книге [34] В.З.Власова и Н.Н.Леонтьева вместе с изложением статьи [33] приведены решения целого ряда новых задач для толстых и многослойных плит и оболочек, а также плит на упругом основании.

Таким образом, В.З.Власов и А.М.Лурье предложили и развили МНФ как метод сведения пространственной задачи теории упругости к некоторой двумерной. Авторы различно подходят как к построению основных соотношений метода, так и к ходу расчета, получая тем не менее, аналогичные результаты.

Эти различия характеризуют две основные схемы решения задач теории упругости МНФ. Так, для построения общего решения задачи о равновесии толстой плиты А.И.Лурье использует символический метод, получая выражения, записанные в замкнутой трансцендентной форме. При определении начальных функций автор использует трансцендентные операции и трансцендентные дифференциальные уравнения, получая решения, точно удовлетворяющие исходным уравнениям равновесия и граничным условиям на торцевых поверхностях плиты. При этом рассматриваются некоторые частные, хотя и достаточно широкие, классы нагрузок.

В.З.Власов, раскладывая искомые функции в степенные ряды по одному направлению, строит матрицу прямого преобразования начальных функций в искомые. При этом операторы матрицы начальных функций определяются в виде бесконечных операционных рядов. Формальное суммирование этих рядов дает трансцендентную форму записи операторов, но автор пользуется усеченными суммами и приходит в результате не к трансцендентным, а к полигармоническим дифференциальным уравнениям относительно разрешающей функции. Получаемое при этом приближенное решение задачи, позволяет автору не ограничивать общности нагрузок. Оба подхода имеют свои достоинства в зависимости от характера решаемых задач.

Говоря о развитии и совершенствовании получения основных соотношений метода, нельзя не обратить внимание на работы А.С.Малиева. В 1951 году А.С.Малиев предложил метод [90] основанный на общих решениях (функциональных представлениях вектора напряжений и перемещений) Б.Г.Галеркина, П.Ф.Папковича и В.Черрути. Входящие в общее решение гармонические и бигармонические функции записаны так, что на плоскости  $Z=0$  функции общего решения оказываются заданными самой функцией и необходимым количеством ее производных по  $Z$ . Приравнивая начальные функции: перемещения и напряжения  $U^o, V^o, W^o, \sigma^o, \tau_{yz}^o, \tau_{zx}^o$ , соответствующим функциям общего решения, А.С.Малиев получает дифференциальную связь и, таким образом, представление искомых характеристик НДС в произвольной точке тела через начальные функции. В статье [90] метод использован для пространственных статических задач теории упругости изотропного тела в прямоугольной декартовой системе координат.

Основополагающе работы А.И.Лурье были продолжены в трудах советских ученых: В.А.Агарева [1-4], В.Г.Бабаджаняна [8-9], М.Г.Ванюшенкова [16-18], В.В.Власова [23-32], А.Н.Волкова [35-39], И.И.Воровича [40-44], Ф.А.Гохбаума [49, 50], Е.М.Круга [73, 74], Н.Н.Леонтьева [76], С.Г.Лехницкого [77-79], У.К.Нигула [91,92], Б.М.Нулера [93-99], Я.С.Подстригача и В.А.Столярова [108,133,134], В.К.Прокопова [110-115, 54, 55], В.Д.Райзера [119-123],



И.Г.Терегулова [131], Н.А.Устинова [139, 140], и др.

Библиографию по вопросам применения метода начальных функций в задачах теории упругости также можно найти в работах [4, 17, 18, 32,60, 110], где многие из отмеченных выше работ подробно рассмотрены, а также сформулированы задачи дальнейших исследований.

Кратко остановимся лишь на некоторых работах.

В работах Ф.А.Гохбаума [49, 50] получены зависимости МНФ для решения пространственных задач теории упругости в цилиндрической системе координат, решен ряд практически важных задач. Отличительной особенностью исследований Ф.А.Гохбаума является использование общих решений теории упругости для получения основных соотношений метода в замкнутом символическом виде. Автору удалось получить операторы-функции через комбинации функций Бесселя символического аргумента. В работе [49] полученные числовые соотношения использованы для расчета цилиндрических архитравов железобетонных станин прессов, исследуются основные свойства операторов - функций. В работе [50] изложен метод "моментов", позволяющий приближенно удовлетворять условиям сопряжения для круглых плит. Сущность представленного метода заключается в том, что вместо контактных напряжений и перемещений при расчете сопряжения рассматриваются числовые последовательности моментов этих функций.

Особое значение имеют работы В.А.Агарева. В монографии [1] дается обоснование математического формализма метода, рассмотрены некоторые плоские задачи теории упругости изотропного тела, изгиба пластин, представлена общая теория операторов МНФ.

Большое количество работ по расчету пластин с помощью МНФ опубликовано М.Г.Ванюшенковым. В статье [17] решена задача об изгибе пластины постоянной толщины, в работе [18] излагается расчет равнобокой трапецевидной пластины, жестко защемленной по контуру, под действием гидростатической нагрузки. Проведено сравнение результатов расчета пластин, опертых по параллельным контурам на промежуточные опоры, с данными,

полученными методом электрического моделирования, при этом отмечено расхождение результатов в зоне скошенных краев. В статье [16] приведены соотношения МНФ для задачи изгиба пластины, лежащей на упругом основании. Решение строится в одинарных тригонометрических рядах. В статье [20] построены зависимости метода для расчета пластин, опертых по параллельным сторонам конура на промежуточные опоры.

Исследования В.Д.Райзера [119-123] посвящены вопросам применения МНФ для расчета пространственных конструкций типа ортотропных и изотропных тонких оболочек, а также пологих оболочек, где на основании разработанного автором метода решения системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами построены зависимости метода для исследования тонких упругих оболочек.

В статьях [35-39] А.Н.Волков рассматривает применение МНФ для построения теории толстых оболочек. Используя подход В.З.Власова к интегрированию уравнений смешанного метода для получения соотношений МНФ в ортогональной системе криволинейных координат, автор получил рекуррентные формулы для вычислений компонентов матрицы - оператора.

В работах Я.С.Подстригача и В.А.Столярова [108,129] разработан матрично-операционный метод решения систем дифференциальных уравнений в частных производных, с помощью которого получены разрешающие системы уравнений для пространственных краевых задач теории упругости изотропного тела в различных ортогональных системах координат. Статья [129] посвящена решению задачи для бесконечного плоского слоя постоянной толщины, в работе [130] матрично - операционный метод применен для получения замкнутого вида операторов МНФ в осесимметричной задаче теории упругости для цилиндрического слоя.

В последние годы интерес к исследованию вопросов расчета пластин с использованием основных приемов МНФ подтверждается наличием статей, посвященных этому вопросу.

Так, в статье [146] Г.Н.Ширунова методом начальных функций решена

пространственная задача теории упругости сжатия изотропного слоя нормальной нагрузкой, равномерно распределенной на ограниченной области границы. Данный слой, разделенный на отдельные подслои, имеющие разные упругие характеристики, служит моделью многослойного основания. Выделенный из бесконечного слоя параллелепипед, размеры которого много больше размера области локальной нагрузки, рассматривается как упругое полупространство.

С помощью специально разработанной программы на основе комплекса символьных вычислений Maple получено численно-аналитическое решение, в котором искомые функции перемещений представлены рядами Фурье. Проблема вычислительной неустойчивости счета, присущая МНФ при высоких номерах гармоник, решается использованием в представлении вещественных чисел мантииссы достаточной длины. Проведено сравнение полученных результатов с решениями классической теории упругости для упругого полупространства, заложенными в нормативные документы по проектированию оснований фундаментов, а также с решениями, получаемыми с помощью метода конечных элементов. В работе А.В.Матросова [87] представлен алгоритм построения основных соотношений метода начальных функций (МНФ) для плоской задачи теории упругости анизотропного тела в ортогональной прямоугольной системе координат в матрично-операторной форме, используя общее решение уравнений теории упругости в перемещениях через две произвольные функции. Доказана регулярность операторов МНФ для случая произвольной анизотропии. Показана сходимость получаемых в решении МНФ степенных рядов в случае задания начальных функций через тригонометрические синусы и косинусы. В работе [88] представлены два алгоритма вывода замкнутых форм операторов МНФ для пространственной задачи изотропного линейно-упругого тела на основе подходов А.С.Малиева и В.А.Агарёва получения основных соотношений МНФ. В обоих подходах строится решение уравнений теории упругости в перемещениях: в подходе А.С.Малиева через три функции общего решения с последующим их связыванием с начальными функциями, в подходе В.А.Агарёва - сразу же через шесть начальных функций. В работе [89] построены общие решения для упругой

анизотропной прямоугольной области, позволяющие удовлетворять не только граничным условиям, заданным в виде смещений и внешних напряжений, но и смешанным граничным условиями. Представлен общий алгоритм расчета прямоугольной анизотропной упругой области с произвольными граничными условиями на ее гранях. Приведено доказательство регулярности операторов метода начальных функций для анизотропного тела, кроме того, доказательство сходимости степенных рядов решений в случае произвольной анизотропии при использовании в качестве начальных функций тригонометрических синусов и косинусов. Определены формы операторов метода начальных функций на основе подхода на базе уравнений теории упругости в перемещениях для случаев ортотропного и изотропного тела.

Теперь остановимся более подробно на анализе существующих способов удовлетворения граничным условиям при помощи решений, получаемых МНФ и тесно связанным с ним методом однородных решений.

## **1.2 Однородные решения и их использование для удовлетворения краевых условий в задачах теории упругости.**

Однородными решениями называют частные решения однородных дифференциальных уравнений, описывающих краевую задачу, удовлетворяющие нулевым граничным условиям на определенных участках поверхности рассматриваемого тела. Так, для двумерной задачи изгиба пластинки в безразмерной прямоугольной системе координат  $\xi, \eta$  они могут быть записаны в виде:

$$\bar{W}_{(\eta, \xi)} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sh} r_n \xi + B_n \operatorname{ch} r_n \xi) F(r_n, \eta), \quad (1.2.1)$$

где  $r_n$  - собственные числа, а  $F(r_n, \eta)$  - собственные функции задачи.

Как отмечается в работе [112], попытки решения краевых задач теории упругости в более строгой постановке, чем с использованием принципа Сен-Венана, привели к применению однородных решений, удовлетворяющих граничным условиям на тех участках, где они поставлены строго, и позволяющих

корректировать смягченные граничные условия. Наиболее естественным способом построения однородных решений является МНФ (символический метод).

Некоторые типы однородных решений были известны еще задолго до выхода в свет работ А.И.Лурье и В.З.Власова. Впервые однородные решения для слоя, не дающие напряжений на граничных плоскостях  $Z=\pm h$ , определяемые трансцендентным уравнением:

$$sh r_n \pm r_n = 0, \quad (1.2.2)$$

были приведены в работе J.Dougall [150], опубликованной в 1904 году. Разыскивая решения в виде определенных интегралов, автор вычислил их при помощи теоремы о вычетах и получил комплексные ряды, зависящие от корней уравнения (1.2.2). При этом J.Dougall показал, что (1.2.2) имеет бесконечное множество комплексных корней  $r_n = \pm\theta_n \pm i\rho_n$ , группирующихся по четыре, и получил для них асимптотические формулы. Однако для удовлетворения граничных условий автор однородные решения не использовал.

В 1907 году в работе L.N.G.Filon [152] впервые было получено разложение полинома в ряд по неортогональным собственным функциям однородных решений. Его метод состоит в рассмотрении комплексного интеграла, для которого вычет в нуле подинтегральной функции равен заданному полиному, а вычеты в полюсах трансцендентной функции образуют искомый ряд. Сходимость этого ряда обусловлена стремлением к нулю комплексного интеграла при неограниченном увеличении радиуса контура интегрирования.

В дальнейшем метод L.N.G.Filon нашел применение в работах А.И.Лурье [85], В.К.Прокопова [110] и др. Так, в [84] при решении задачи об изгибе круглой толстой плиты под равномерно распределенной нагрузкой, на боковой поверхности плиты удовлетворено точно условие отсутствия радиального смещения, условие отсутствия осевого смещения выполняется на средней окружности.

В работе [110] решение А.И.Лурье распространено на случай произвольной

нагрузки, имеющей осевую симметрию. Кроме того, в этой работе повторное применение теоремы о вычетах позволило автору преобразовать комплексные ряды к вещественным. В подобной постановке В.К.Прокопов рассмотрел плоскую задачу для тонкой пластинки [109].

В этих работах авторам удалось точно удовлетворить при помощи однородных решений одному граничному условию ввиду того, что постоянные интегрирования однородных решений, содержащие произвольную действительную и мнимую часть и призванные служить для удовлетворения двух граничных условий, могут быть определены в соответствии с методом L.N.G.Filon из удовлетворения лишь одного граничного условия.

В 1935 году J.H.A.Brahtz в работе [149] получил однородные решения плоской задачи теории упругости в полярных координатах, не дающие напряжений на гранях бесконечного клина. Эти решения автор использовал для приближенного удовлетворения граничных условий на свободном краю треугольной плотины. При этом условия удовлетворялись в трех точках края.

Метод коллокации применялся затем в работах многих авторов.

Г.А.Гринберг и Р.П.Поплавский применили этот метод при решении задачи изгиба полукруглой тонкой плиты [52]. Постоянные интегрирования однородных решений определялись путем удовлетворения граничных условий в ряде точек  $Y_s$ :

$$f_1(Y_s) = 2Re \sum_{n=1}^k \alpha_n F(r_n, Y_s); \quad s = 1, 2 \dots k_1;$$

$$f_2(Y_s) = 2Re \sum_{n=1}^k \alpha_n r_n^2 F(r_n, Y_s); \quad s = 1, 2 \dots k_2;$$

$$k = k_1 + k_2,$$

где  $f_i(Y_s)$ -заданные функции;

$F(r_n, Y_s)$  - собственные функции однородных решений, причем точки  $Y_s$  для  $f_1(Y_s)$  и  $f_2(Y_s)$  чередуются.

Произвольный выбор точек колокаций при увеличении их числа иногда приводит к ухудшению результатов. Это следует из работы [64] А.Ф.Захаревича,

посвященной изучению изгиба тяжелого прямоугольника, а также из [125] В.Г.Рекача, в которой однородные решения используются для определения напряжений в теле треугольной плотины.

Условия отсутствия перемещений в задаче о стесненном изгибе прямоугольной полосы, рассматриваемой В.К.Прокоповым [114], удовлетворялись в пяти точках.

В работах К.А.Китовера [67, 68], приведены многие типы однородных решений для плоской задачи теории упругости и задачи изгиба тонкой плиты. Рассматривая конкретные примеры расчета, автор также использует метод колокаций. Этот же метод применен в работе [17] М.Г.Ванюшенкова, где получены основные зависимости МНФ в косоугольной системе координат и рассматриваются задачи изгиба, свободные колебания параллелограмных и трапециевидных пластин, а также устойчивость прямоугольных пластин.

Вышедшая в 1938 году книга F.Tolcke [154] положила начало применению еще одного способа удовлетворения краевых условий при помощи однородных решений. В ней автор, повторив результаты работы J.H.A.Brahtz [149], вновь использует однородные решения для отыскания напряжений в теле треугольной плотины. При этом он предлагает минимизировать квадратичную погрешность, возникающую вследствие ограничения числа удерживаемых членов ряда.

После выхода в свет работы J.Fadle [151], получившей широкую известность, метод наименьших квадратичных отклонений применялся в работах многих авторов. В последние годы этот метод плодотворно использует Б.М.Нулер для решения смешанных задач теории упругости [94].

Способ определения коэффициентов однородных решений, основанный на приравнивании нулю статических моментов и моментов высших степеней был предложен в работе Д.Я.Германа и В.К.Проконова [46]. Затем в статьях Ю.А.Груздева и В.К.Проконова [54, 55] метод полимоментов был применен для исследования изгиба толстых плит.

Этот же прием использовал в работе [50] Ф.А.Гохбаум при расчете сопряжений цилиндров и пластин с помощью однородных решений, где он, кроме

того, предложил разыскивать коэффициенты однородных решений из сравнения разложений нагрузки и краевых значений однородных решений в ряды Фурье-Бесселя. Разложения в степенные ряды использовал В.А.Агарев в работах [1-4].

В отмеченных выше исследованиях развивались различные способы приближенного удовлетворения граничных условий при помощи однородных решений в задачах теории упругости. Это не касается метода Файлона, который позволяет точно удовлетворить лишь одному граничному условию.

Широко известные работы [106,107] П.Ф.Папковича положили начало использованию особых свойств однородных решений, позволяющих в некоторых случаях точно удовлетворить двум граничным условиям, если будут найдены следующие разложения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n(\eta) = f_1(\eta); \quad \sum_{n=1}^k B_n r_n^2 F_n(\eta) = f_2(\eta), \quad (1.2.3)$$

где  $B_n$  - неизвестные комплексные постоянные, одинаковые в обоих разложениях,  $r_n$ - корни трансцендентного уравнения, вид которого, а также функций  $F_n(\eta)$  определяется граничными условиями на продольных кромках пластинки.

Задача разложения двух независимых действительных функций в ряды вида (1.2.3) была решена в отмеченных выше работах П.Ф.Папковича для случая защемления  $2^x$  противоположных кромок пластинки и плоской задачи теории упругости при отсутствии напряжений на продольных кромках прямоугольной полосы.

Функции  $F_n(\eta)$ , входящие в однородное решение задачи (1.2.1), удовлетворяют следующему обыкновенному однородному дифференциальному уравнению:

$$F_n^{iv}(\eta) + 2r_n^2 F_n''(\eta) + r_n^4 F_n(\eta) = 0. \quad (1.2.4)$$

В работах (61, 99, 100) показано, что функции  $F_n(\eta)$ , для задачи изгиба пластинки с двумя защемленными противоположными кромками, обладают свойством, часто теперь называемым соотношением или свойством обобщенной ортогональности Папковича-Гринберга:



$$\int_0^1 (F_n''(\eta)F_k''(\eta) - r_n^2 r_k^2 F_n(\eta)F_k(\eta)) d\eta = \begin{cases} 0, n \neq k \\ J_n, n = k \end{cases} \quad (1.2.5)$$

где  $J_n = \int_0^1 (F_n''^2(\eta) - r_n^4 F_n^2(\eta)) d\eta.$

В работе [112] показано, что это свойство справедливо при всех других условиях закрепления продольных краев изгибаемой пластинки, а также при решении плоской задачи теории упругости.

Это замечательное соотношение позволило П.Ф.Папковичу приемом Фурье определить в замкнутом виде искомый коэффициент разложений (1.2.5).

Условия существования и сходимости разложений (1.2.5), рассматривались в работе [20] С.Ф.Кузнецова, что позволило ему, уточнить известные для случая защемления условия Г.А.Гринберга. В этих же работах, на примере задачи изгиба прямоугольной пластинки с различными условиями закрепления продольных сторон, предложен, основанный на использовании теории вычетов и соотношения обобщенной ортогональности, способ построения новых форм записи однородных решений, отличительной чертой которого является независимость от комплексных корней характеристического уравнения (собственных чисел).

Дальнейшему исследованию этого свойства, для случая изгиба пластинки при наличии сжимающих сил в ее срединной плоскости, посвящены работы М.Г.Ванюшенкова [19]. Он показал, как могут быть удовлетворены граничные условия на поперечных сторонах пластинки и найдены коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$ .

Получив соотношения обобщенной ортогональности для сжато-изгибаемой пластинки:

$$\int_0^1 (F_n''(\eta) F_k''(\eta) - (r_n^2 r_k^2 + 2N_2(r_n^2 + r_k^2) + 2N_1 N_2) F_n(\eta) F_k(\eta)) d\eta \quad (1.2.6)$$

$$= \begin{cases} 0, n \neq k \\ J_n, n = k \end{cases}$$

М.Г.Ванюшенков получил формулу для определения коэффициентов  $B_n$  в разложениях (1.2.3):

$$B_n = -\frac{1}{J_n} \left\{ \int_0^1 f_1''(\psi) F_n''(\eta) d\eta - (N_2 + r_n^2) \int_0^1 f_2(\psi) F_n(\eta) d\eta - \right. \\ \left. - N_2(2N_1 + r_n^2) \int_0^1 f_1(\psi) F_n(\eta) d\eta \right\}, \quad (1.2.7)$$

где  $J_n = \int_0^1 (F_n''^2(\eta) - [r_n^4 + 2N_2(N_1 + r_n^2)] F_n^2(\eta)) d\eta.$

Функции  $F_n(\eta)$  удовлетворяют следующему обыкновенному однородному дифференциальному уравнению:

$$F_n^{IV}(\eta) + 2(r_n^2 + N_2)F_n''(\eta) + (r_n^4 + 2r_n^2 N_1)F_n(\eta) = 0. \quad (1.2.8)$$

Был сделан вывод, что соотношение обобщенной ортогональности для сжато-изогнутых пластинок (1.2.6) справедливо лишь в случае, когда на продольных сторонах нагруженных сжимающей силой  $N_2$ , имеются какие-либо связи, препятствующие перемещениям или поворотам этих сторон пластинок, - заделки или шарнирные опоры для которых  $F_n(1) = 0$ , или  $F_n'(1) = 0$ .

Следует отметить, что если при решении задачи изгиба пластины, имеется достаточно работ, посвященных исследованию существования разложений по собственным функциям, то по устойчивости, работ такого плана нами не обнаружено.

Аналог соотношения обобщенной ортогональности (1.2.5) для задачи изгиба ортотропных пластин используется в работах [61-63] О.А.Журавской.

В 1969 году Б.М.Нулер в [98] указал на полученные впервые соотношения обобщенной ортогональности Р.А.Schiff [153]. В работе он обобщает соотношение Р.А.Schiff на другие виды граничных условий и строит решения ряда частных задач о конечном упругом цилиндре. На основе этого соотношения Б.М.Нулер развил метод кусочно-однородных решений [93-99].

Определению соотношений обобщенной ортогональности в динамических задачах теории упругости посвящена статья А.С.Зильберглейта и Б.М.Нулера [65]. Различные виды записи рассматриваемых соотношений можно найти в

работах [71,109].

Такое большое внимание соотношению обобщенной ортогональности уделяется потому, что его применение позволяет легко удовлетворить различным условиям на кромках пластинки, ортогональных к начальной линии (на поперечных краях). Это существенно упрощает построение аналитических решений ряда задач, недоступных для МНФ.

Численная реализация метода не требует больших затрат машинного времени и может быть осуществлена на малых ЭВМ, тем более с развитием, особенно в последние годы, компьютерной алгебры, дающей возможность на основе символьного представления решать довольно сложные задачи. Например, использовать МНФ для расчета толстых анизотропных многослойных плит и цилиндрических оболочек в криволинейных координатах. Вообще говоря, использование компьютерной алгебры позволяет переложить всю трудоемкость громоздкой вычислительной работы, сопровождающей сложнейшие задачи, на "плечи" электронно-вычислительной машины, что значительно облегчает работу, а потому является очень перспективным в настоящее время направлением.

В заключение сформулируем основные выводы, следующие из анализа рассмотренных выше работ, посвященных применению МНФ:

– решения пространственных и двумерных задач теории упругости, получаемые с использованием МНФ, точно удовлетворяют исходным дифференциальным уравнениям и граничным условиям на большей части поверхности упругого тела и позволяют приближенно удовлетворить краевым условиям на сравнительно малых ее участках. Произвольные постоянные, входящие в (1.2.1), могут быть найдены из граничных условий на поперечных сторонах пластинки точно, если стороны шарнирно оперты или имеют скользящую заделку (ползун) и доказано соотношение обобщенной ортогональности для собственных функций;

– часть работ может быть выполнена заранее и представлена в виде таблиц, позволяющих при едином подходе рассчитывать пластины с любыми граничными условиями на любые виды нагрузок;

– на основе МНФ необходимо получить соотношение обобщенной ортогональности для определения произвольных постоянных в случаях, когда на поперечной стороне пластинки имеется заделка или он свободен от опор;

– разработанная методика должна быть опробована на тестовых задачах устойчивости пластин и необходимо провести сравнительный анализ результатов расчета с результатами, полученными численными методами.

Учитывая преимущества метода начальных функций для получения аналитического решения краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, он был выбран в предлагаемой работе, для решения поставленной задачи.

Остановимся теперь на порядке расчета сжато-изогнутых пластинок и задачи устойчивости пластинки методом начальных функций, а также на построении новых форм общих решений и способов удовлетворения граничным условиям при помощи метода однородных решений.

**ГЛАВА 2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СЖАТО - ИЗОГНУТЫХ ПЛАСТИНОК И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНКИ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.**

**2.1. Построение матрицы начальных функций.**

Дифференциальное уравнение равновесия сжато-изогнутой тонкой упругой пластинки постоянной толщины  $\delta$ , отнесенной к безразмерной системе координат  $\eta = \frac{y}{h}; \xi = \frac{x}{h}; -1 \leq \eta \leq 1; -\lambda \leq \xi \leq \lambda; \lambda = \frac{l}{h}$ , при действии распределенной внешней поперечной нагрузки  $q(\xi, \eta)$  и продольных сжимающих сил  $T_1$  и  $T_2$ , лежащих в ее срединной плоскости и равномерно распределенных соответственно вдоль осей  $\xi$  и  $\eta$  (рисунок.2.1.1), имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \frac{T_1 h^2}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{T_2 h^2}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = hP(\eta, \xi), \quad (2.1.1)$$

где  $P(\eta, \xi) = \frac{qh^3}{D}$ - безразмерная нагрузка;

$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$  - цилиндрическая жесткость пластинки;

$h$  и  $l$ - размеры сторон пластинки.

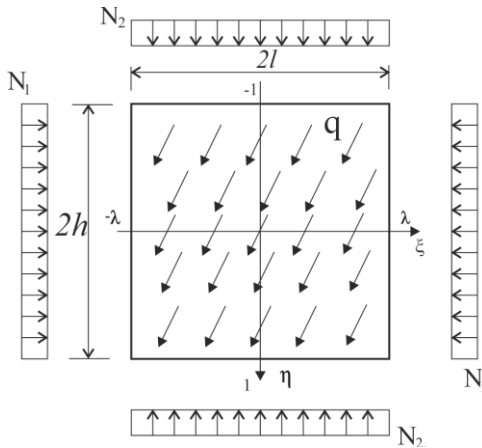


Рисунок 2.1.1- Расчетная схема.

Полное решение уравнения (2.1.1) состоит из общего решения однородного уравнения и частного интеграла.

Для построения общего решения однородного уравнения используем символический операторный метод А.И.Лурье [86]. Введем следующие обозначения:

$$2N_1 = \frac{T_1 h^2}{D}; \quad 2N_2 = \frac{T_2 h^2}{D}; \quad - \text{безразмерные сжимающие силы} \quad (2.1.2)$$

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \alpha^n = \frac{\partial^n}{\partial \xi^n}; \quad - \text{символ дифференцирования по координате } \xi. \quad (2.1.3)$$

Тогда однородное уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + 2(\alpha^2 + N_2) \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + (\alpha^4 + 2 \alpha^2 N_1) W = 0. \quad (2.1.4)$$

В соответствии с символическим методом будем рассматривать (2.1.4) как обыкновенное дифференциальное уравнение, формально считая символ дифференцирования  $\alpha$  некоторым постоянным числом. Его решение ищем в виде:

$$W = C e^{k\eta} \quad (2.1.5)$$

Подставим (2.1.5) в (2.1.4) получим:

$$[k^4 + 2(\alpha^2 + N_2)k^2 + (\alpha^4 + 2 \alpha^2 N_1)] C e^{k\eta} = 0, \quad (2.1.6)$$

Поскольку  $C e^{k\eta} \neq 0$ , следует, что уравнению (2.1.4) соответствует характеристический биквадратный полином:

$$k^4 + 2(\alpha^2 + N_2)k^2 + (\alpha^4 + 2 \alpha^2 N_1) = 0, \quad (2.1.7)$$

корни которого  $k_{1,2} = \pm ia$ ;  $k_{3,4} = \pm ib$ ,

$$\text{где } a = \sqrt{N_2 + \alpha^2 + \Delta}; b = \sqrt{N_2 + \alpha^2 - \Delta}; \Delta = \sqrt{N_2^2 - \alpha^2 (2N_1 - 2N_2)}. \quad (2.1.8)$$

Следовательно, общий интеграл однородного уравнения (2.1.1) в символической форме запишется в следующем виде:

$$W = C_1 \sin a\eta + C_2 \cos a\eta + C_3 \sin b\eta + C_4 \cos b\eta, \quad (2.1.9)$$

где  $C_i$ , формально представляющие собой произвольные постоянные интегрирования, на самом деле являются произвольными функциями координаты  $\xi$ , над которыми необходимо выполнить дифференциальную операцию  $\alpha^n = \frac{\partial^n}{\partial \xi^n}$ , предварительно представив тригонометрические функции в виде степенных рядов аргумента.

Следуя основной идее метода начальных функций, выразим геометрические и силовые характеристики изгибаемой пластинки через начальные функции. Линию  $\eta=0$  (рис. 2.1.1) примем за начальную и условимся считать кромки пластинки, параллельные и перпендикулярные к этой линии соответственно продольными и поперечными.

В технической теории пластинок имеют физический смысл и могут быть заданы на начальной линии прогиб  $W$ , угол поворота  $\varphi_y = \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \eta}$ , момент

$M_y = -\frac{D}{h^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right)$  и приведенная (по Кирхгофу) перерезывающая сила  $V_y = -\frac{D}{h^3} \left( \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial \eta \partial \xi^2} \right)$ . В задачах устойчивости при наличии сжимающей силы  $T_2$  удобнее в качестве безразмерной величины перерезывающей силы в сечении  $\eta=0$  рассматривать обобщенную перерезывающую силу  $Q_y = \frac{D}{h^3} (V_y - T_2 \varphi_y)$ , перпендикулярную первоначальной недеформированной срединной плоскости пластинки. Поэтому в задачах за безразмерные начальные функции примем следующие величины:

$$\begin{aligned} W_0(\xi) &= \frac{1}{h} W(0, \xi); & \varphi_0(\xi) &= \varphi_y(0, \xi); \\ M_0(\xi) &= \frac{h}{D} M_y(0, \xi); & Q_0(\xi) &= \frac{h^2}{D} (V_y(0, \xi) - T_2 \varphi_y(0, \xi)). \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Используя граничные условия (2.1.10), выразим  $C_i$ , через начальные функции:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{Q_0}{a(a^2 - b^2)} - \frac{a^2 - \nu \alpha^2}{a(a^2 - b^2)} \varphi_0; & C_2 &= \frac{M_0}{a^2 - b^2} - \frac{b^2 - \nu \alpha^2}{a^2 - b^2} W_0; \\ C_3 &= \frac{b^2 - \nu \alpha^2}{b(a^2 - b^2)} \varphi_0 - \frac{Q_0}{b(a^2 - b^2)}; & C_4 &= \frac{a^2 - \nu \alpha^2}{a^2 - b^2} W_0 - \frac{M_0}{a^2 - b^2}. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

В результате подстановки соотношений (2.1.11) в (2.1.9) и в соответствующие выражения для угла поворота и внутренних усилий придем к искомым зависимостям метода начальных функций:

$$\begin{aligned} W &= h [L_{WW} W_0 + L_{W\varphi} \varphi_0 + L_{WM} M_0 + L_{WQ} Q_0]; \\ \varphi_y &= [L_{\varphi W} W_0 + L_{\varphi\varphi} \varphi_0 + L_{\varphi M} M_0 + L_{\varphi Q} Q_0]; \\ M_y &= \frac{D}{h} [L_{MW} W_0 + L_{M\varphi} \varphi_0 + L_{MM} M_0 + L_{MQ} Q_0]; \\ Q_y &= \frac{D}{h^2} [L_{QW} W_0 + L_{Q\varphi} \varphi_0 + L_{QM} M_0 + L_{QQ} Q_0], \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

где  $L_{ij}$ - трансцендентные линейные дифференциальные операторы, зависящие от координаты  $\eta$ , приведены в таблице 2.1.1 на стр. 33 (как в замкнутом виде, так и в виде степенных рядов по  $\alpha$ ).

Эта матрица справедлива, при расчете сжато-изогнутых пластинок, когда  $N_1$  и  $N_2$  не равны нулю. В случае решения задачи только изгиба ( $N_1=N_2=0$ )

используется матрица, приведенная в таблице 2.1.2 на стр. 34. Она не может быть получена из матрицы таб.2.1.1, если положить  $N_1=N_2=0$ , так как корни характеристических уравнений для этих задач различны: при изгибе они кратные, а для сжато-изогнутой пластинки они все различные.



Таблица 2.1.1 Матрица дифференциальных операторов для расчета сжато-изгибаемых пластинок.

	$W_o$	$\varphi_o$	$M_o$	$Q_o$
$\frac{1}{h}W$	$\frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2) \cos b\eta - \\ -(b^2 - \nu \alpha^2) \cos a\eta \end{pmatrix} =$ $= 1 -$ $-\alpha^2 \left( \frac{N_1 - \nu N_2}{2N_2^2} (\cos \sqrt{2N_2}\eta - 1) + \frac{\eta^2 N_1}{2N_2} \right) \dots$	$\frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin a\eta}{a} - \\ -(b^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin b\eta}{b} \end{pmatrix} =$ $= \frac{\sin(\sqrt{2N_2}\eta)}{\sqrt{2N_2}} +$ $\alpha^2 \begin{pmatrix} -\frac{\cos \sqrt{2N_2}\eta (N_1 - 2N_2)}{4N_2^2} - \frac{\eta (N_1 - \nu N_2)}{2N_2^2} \\ + \frac{\sin \sqrt{2N_2}\eta (2N_1 - 2N_2 - \nu N_2)}{2N_2^2 \sqrt{2N_2}} \end{pmatrix} \dots$	$\frac{1}{a^2 - b^2} [\cos a\eta - \cos b\eta] =$ $= \frac{\cos \sqrt{2N_2}\eta - 1}{2N_2}$ $+\alpha^2 \begin{pmatrix} \frac{\eta^2 N_1}{4N_2^2} + \frac{\eta \sin \sqrt{2N_2}\eta (N_1 - 2N_2)}{4N_2^2 \sqrt{2N_2}} \\ + \frac{(N_1 - N_2)(\cos \sqrt{2N_2}\eta - 1)}{2N_2^3} \end{pmatrix} \dots$	$\frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} \frac{\sin a\eta}{a} - \frac{\sin b\eta}{b} \\ \eta \sqrt{2N_2} - \sin \sqrt{2N_2}\eta \end{pmatrix} =$ $= -\frac{2N_2 \sqrt{2N_2}}{12N_2^2} - \frac{(N_1 - N_2)\eta}{2N_2^3}$ $+\alpha^2 \begin{pmatrix} -\frac{\eta \cos \sqrt{2N_2}\eta (N_1 - 2N_2)}{8N_2^3} \\ + \frac{(5N_1 - 6N_2)\sin \sqrt{2N_2}\eta}{8N_2^3 \sqrt{2N_2}} \end{pmatrix} \dots$
$\varphi_y$	$\frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (b^2 - \nu \alpha^2) a \sin a\eta - \\ -(a^2 - \nu \alpha^2) b \sin b\eta \end{pmatrix} =$ $= -\alpha^2 \left( \frac{\eta N_1}{N_2} - \frac{\sin \sqrt{2N_2}\eta (N_1 - \nu N_2)}{N_2 \sqrt{2N_2}} \right) \dots$	$\frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2) \cos a\eta - \\ -(b^2 - \nu \alpha^2) \cos b\eta \end{pmatrix} =$ $= \cos \sqrt{2N_2}\eta -$ $-\alpha^2 \begin{pmatrix} \frac{N_1 - \nu N_2}{2N_2^2} + \frac{\cos \sqrt{2N_2}\eta (\nu N_2 - N_1)}{2N_2^2} \\ - \frac{\eta \sin \sqrt{2N_2}\eta (N_1 - 2N_2)}{2N_2 \sqrt{2N_2}} \end{pmatrix} \dots$	$\frac{1}{a^2 - b^2} (b \sin b\eta - a \sin a\eta) =$ $= \frac{-\sin \sqrt{2N_2}\eta}{\sqrt{2N_2}} +$ $\alpha^2 \begin{pmatrix} \frac{\eta \cos \sqrt{2N_2}\eta (N_1 - 2N_2)}{24} + \frac{\eta N_1}{2N_2^2} \\ + \frac{\sin \sqrt{2N_2}\eta (2N_2 - 3N_1)}{4N_2^2 \sqrt{2N_2}} \end{pmatrix} \dots$	$\frac{1}{a^2 - b^2} [\cos a\eta - \cos b\eta] =$ $= \frac{\cos(\sqrt{2N_2}\eta) - 1}{2N_2}$ $+\alpha^2 \begin{pmatrix} \frac{\eta^2 N_1}{4N_2^2} + \frac{\eta \sin(\sqrt{2N_2}\eta)(N_1 - 2N_2)}{4N_2^2 \sqrt{2N_2}} \\ + \frac{(N_1 - N_2)(\cos(\sqrt{2N_2}\eta) - 1)}{2N_2^3} \end{pmatrix} \dots$
$\frac{h}{D}M_y$	$\frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2)(b^2 - \nu \alpha^2) \cdot \\ \cdot (\cos b\eta - \cos a\eta) \end{pmatrix} =$ $= -\alpha^2 \left( \frac{(\cos \sqrt{2N_2}\eta - 1)(N_1 - \nu N_2)}{N_2} \right) \dots$	$\frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2)^2 \frac{\sin a\eta}{a} - \\ -(b^2 - \nu \alpha^2)^2 \frac{\sin b\eta}{b} \end{pmatrix} =$ $= \frac{\sin \sqrt{2N_2}\eta \sqrt{2N_2}}{2N_2} +$ $\alpha^2 \begin{pmatrix} \frac{\sin \sqrt{2N_2}\eta (N_1 + 2N_2 - 4\nu N_2)}{2N_2 \sqrt{2N_2}} \\ - \frac{\eta \cos \sqrt{2N_2}\eta (N_1 - 2N_2)}{2N_2} \end{pmatrix} \dots$	$\frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2) \cos a\eta - \\ -(b^2 - \nu \alpha^2) \cos b\eta \end{pmatrix} =$ $= \cos \sqrt{2N_2}\eta -$ $-\alpha^2 \begin{pmatrix} \frac{N_1 - \nu N_2}{2N_2^2} \\ + \frac{\cos \sqrt{2N_2}\eta (N_2 - N_2 + \nu N_2)}{2N_2^2} \\ - \frac{\eta \sin \sqrt{2N_2}\eta (N_1 - 2N_2)}{2N_2 \sqrt{2N_2}} \end{pmatrix} \dots$	$\frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin a\eta}{a} - \\ -(b^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin b\eta}{b} \end{pmatrix} =$ $= \frac{\sin(\sqrt{2N_2}\eta)}{\sqrt{2N_2}} +$ $\alpha^2 \begin{pmatrix} -\frac{\cos \sqrt{2N_2}\eta (N_1 - 2N_2)}{4N_2^2} - \frac{\eta (N_1 - \nu N_2)}{2N_2^2} \\ + \frac{\sin \sqrt{2N_2}\eta (6N_2 - 5N_1 - 2\nu N_2)}{N_2^2 \sqrt{2N_2}} \end{pmatrix} \dots$
$\frac{h^2}{D}Q_y$	$\frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2)^2 b \sin b\eta - \\ -(b^2 - \nu \alpha^2)^2 a \sin a\eta \end{pmatrix} =$ $\alpha^2 (2\eta N_1) - \alpha^4 \left( \frac{\eta (N_1 - N_2)^2}{N_2^2} + \frac{\eta^3 N_1}{4N_2} \right) \dots$	$\frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2)(b^2 - \nu \alpha^2) \cdot \\ \cdot (\cos b\eta - \cos a\eta) \end{pmatrix} =$ $-\alpha^2 \left( \frac{(\cos \sqrt{2N_2}\eta - 1)(N_1 - \nu N_2)}{N_2} \right) \dots$	$\frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (b^2 - \nu \alpha^2) a \sin a\eta - \\ -(a^2 - \nu \alpha^2) b \sin b\eta \end{pmatrix} =$ $= 1 -$ $-\alpha^2 \left( \frac{N_1 - \nu N_2}{2N_2^2} (\cos \sqrt{2N_2}\eta - 1) + \frac{\eta^2 N_1}{2N_2} \right) \dots$	$\frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2) \cos b\eta - \\ -(b^2 - \nu \alpha^2) \cos a\eta \end{pmatrix} =$ $= 1 -$ $-\alpha^2 \left( \frac{N_1 - \nu N_2}{2N_2^2} (\cos \sqrt{2N_2}\eta - 1) + \frac{\eta^2 N_1}{2N_2} \right) \dots$

Таблица 2.1.2 Матрица дифференциальных операторов для расчета изгибаемых пластинок при отсутствии сжимающих сил ( $N_1=N_2=0$ ).

	$W_0$	$\varphi_0$	$M_0$	$Q_0$
$\frac{1}{h}W$	$= 1 - v \frac{\alpha^2 \eta^2}{2!} - \frac{(1-2v) \alpha^4 \eta^4}{4!} + \frac{(2-3v) \alpha^6 \eta^6}{6!} - \dots$ $\left[ \cos \alpha \eta + \frac{1-v}{2} \alpha \eta \sin \alpha \eta - \frac{1+v}{2} \sin \alpha \eta \right] =$	$= \eta - \frac{(2-v) \alpha^2 \eta^3}{3!} + \frac{(3-2v) \alpha^4 \eta^5}{5!} - \frac{(4-3v) \alpha^6 \eta^7}{7!} + \dots$ $\frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1-v}{2} \alpha \eta \cos \alpha \eta + \frac{1+v}{2} \alpha \eta \sin \alpha \eta \right] =$	$= -\frac{\eta^2}{2!} + \frac{2 \alpha^2 \eta^4}{4!} - \frac{3 \alpha^4 \eta^6}{6!} + \frac{4 \alpha^6 \eta^8}{8!} - \dots$ $-\frac{\eta}{2\alpha} \sin \alpha \eta =$	$= -\frac{\eta^3}{3!} + \frac{2 \alpha^2 \eta^5}{5!} - \frac{3 \alpha^4 \eta^7}{7!} + \dots$ $\frac{1}{2\alpha^3} [\alpha \eta \cos \alpha \eta - \sin \alpha \eta] =$
$\varphi_y$	$= -v \alpha^2 \eta - \frac{(1-2v) \alpha^4 \eta^3}{3!} + \frac{(2-3v) \alpha^6 \eta^5}{5!} - \frac{(3-4v) \alpha^8 \eta^7}{7!} + \dots$ $\alpha \left[ \frac{1-v}{2} \alpha \eta \cos \alpha \eta - \frac{1+v}{2} \sin \alpha \eta \right] =$	$= 1 - \frac{(2-v) \alpha^2 \eta^2}{2!} + \frac{(3-2v) \alpha^4 \eta^4}{4!} - \frac{(4-3v) \alpha^6 \eta^6}{6!} + \dots$ $\cos \alpha \eta - \frac{1-v}{2} \alpha \eta \sin \alpha \eta =$	$= -\eta + \frac{2 \alpha^2 \eta^3}{3!} - \frac{3 \alpha^4 \eta^5}{5!} + \frac{4 \alpha^6 \eta^7}{7!} - \dots$ $\frac{1}{2\alpha} [\alpha \eta \cos \alpha \eta + \sin \alpha \eta] =$	$= -\frac{\eta^2}{2!} + \frac{2 \alpha^2 \eta^4}{4!} - \frac{3 \alpha^4 \eta^6}{6!} + \frac{4 \alpha^6 \eta^8}{8!} - \dots$ $-\frac{\eta}{2\alpha} \sin \alpha \eta =$
$\frac{h}{D}M_y$	$= \frac{(1-v)^2}{2!} \alpha^4 \eta^2 - \frac{2(1-v)^2}{4!} \alpha^6 \eta^4 + \frac{3(1-v)^2}{6!} \alpha^8 \eta^6 + \dots$ $\frac{(1-v)^2}{2} \alpha^3 \eta \sin \alpha \eta =$	$= 2(1-v) \alpha^2 \eta - \frac{(1-v)(3-v)}{3!} \alpha^4 \eta^3 + \frac{(1-v)(4-2v)}{5!} \alpha^6 \eta^5 - \dots$ $\frac{1-v}{2} \alpha [(3+v) \sin \alpha \eta + (1-v) \alpha \eta \cos \alpha \eta] =$	$= \frac{(2-3v) \alpha^6 \eta^5}{5!} - \frac{(3-4v) \alpha^8 \eta^7}{7!} + \dots$ $\cos \alpha \eta - \frac{1-v}{2} \alpha \eta \sin \alpha \eta =$	$= \eta - \frac{(2-v) \alpha^2 \eta^3}{3!} + \frac{(3-2v) \alpha^4 \eta^5}{5!} - \frac{(4-3v) \alpha^6 \eta^7}{7!} + \dots$ $\frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1-v}{2} \alpha \eta \cos \alpha \eta + \frac{1+v}{2} \alpha \eta \sin \alpha \eta \right] =$
$\frac{h^2}{D}Q_y$	$= (1-v^2) \alpha^4 \eta - \frac{2v(1-v)}{3!} \alpha^6 \eta^3 - \frac{(1-v)(1-3v)}{5!} \alpha^8 \eta^5 + \dots$ $\frac{1-v}{2} \alpha^3 [(3+v) \sin \alpha \eta - (1-v) \alpha \eta \cos \alpha \eta] =$	$= \frac{3(1-v)^2}{6!} \alpha^8 \eta^6 + \dots$ $\frac{(1-v)^2}{2} \alpha^3 \eta \sin \alpha \eta =$	$= \frac{(2-3v) \alpha^6 \eta^5}{5!} - \frac{(3-4v) \alpha^8 \eta^7}{7!} + \dots$ $\alpha \left[ \frac{1-v}{2} \alpha \eta \cos \alpha \eta - \frac{1+v}{2} \sin \alpha \eta \right] =$	$= 1 - v \frac{\alpha^2 \eta^2}{2!} - \frac{(1-2v) \alpha^4 \eta^4}{4!} + \frac{(2-3v) \alpha^6 \eta^6}{6!} - \dots$ $\cos \alpha \eta + \frac{1-v}{2} \alpha \eta \sin \alpha \eta =$

Матрица, состоящая из операторов над начальными функциями в выражениях (2.1.12), называется матрицей начальных функций. Она определяет общий закон линейного преобразования начальных функций к значениям внутренних усилий и перемещений при произвольной координате  $\eta$ .

В статье [1] В.А.Агарев предлагает назвать выражения (2.1.12) каноническими уравнениями метода начальных функций, так как эта форма записи не зависит от вида дифференциального уравнения и условий задачи, количество же слагаемых определяется порядком исходного уравнения. Для остальных величин  $\varphi_x$ ,  $M_x$ ,  $Q_x$ , характеризующих напряженно деформированное состояние пластинки, могут быть записаны выражения аналогичные (2.1.12).

Полученное однородное решение точно удовлетворяет бигармоническому уравнению (2.1.1), а форма его записи удобна для учета различных внешних воздействий, как силовых, так и кинематических.

## 2.2 Учет внешних воздействий.

Общее решение задачи с учетом внешней нагрузки может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} W &= h[L_{WW}W_0 + L_{W\varphi}\varphi_0 + L_{WM}M_0 + L_{WQ}Q_0 + W^*]; \\ \varphi_y &= [L_{\varphi W}W_0 + L_{\varphi\varphi}\varphi_0 + L_{\varphi M}M_0 + L_{\varphi Q}Q_0 + \varphi_y^*]; \\ M_y &= \frac{D}{h}[L_{MW}W_0 + L_{M\varphi}\varphi_0 + L_{MM}M_0 + L_{MQ}Q_0 + M_y^*]; \\ Q_y &= \frac{D}{h^2}[L_{QW}W_0 + L_{Q\varphi}\varphi_0 + L_{QM}M_0 + L_{QQ}Q_0 + Q_y^*], \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

где последние слагаемые являются частными решениями, учитывающими внешние воздействия.

Метод начальных функций позволяет очень просто получить частные решения, если в каком либо сечении пластинки  $\eta = t_k$  задан разрыв одной из функций  $W$ ,  $\varphi_y$ ,  $M_y$ ,  $Q_y$  по координате  $\eta$  на определенную величину, т.е. приложена внешняя сосредоточенная по  $\eta$  и распределенная по  $\xi$  нагрузка  $q(\xi, t_k)$  (рисунок. 2.2.1), либо задан внешний момент  $m(\xi, t_k)$ , прогиб  $w(\xi, t_k)$  или угол поворота  $\varphi(\xi, t_k)$ , то пользуясь принципом наложения, вытекающим из

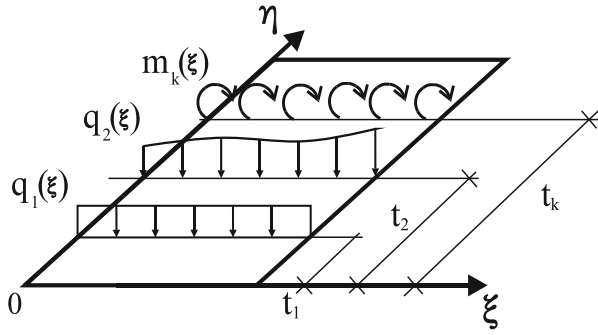


Рисунок 2.2.1 – Схема загрузки.

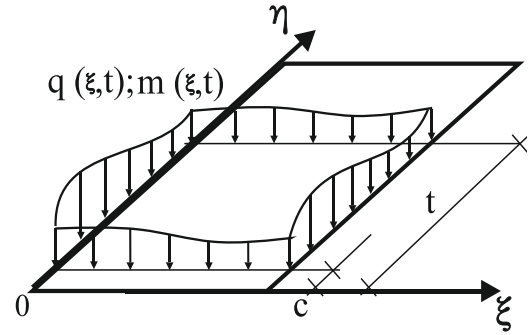


Рисунок - 2.2.2 – Схема загрузки.

линейности преобразований (2.1.10), следует для сечения с координатой  $\eta > t_k$  прибавить влияние этого разрыва. Оно будет равно дифференциальной операции соответствующей функции-оператора над величиной разрыва. Таким образом, запишем функции-операторы для случаев, когда в сечении  $\eta = t_i$  имеется:

- сосредоточенная по  $\eta$  и распределенная по  $\xi$  поперечная нагрузка  $q_i(\xi, t_i)$

$$\begin{aligned} W^* &= - \sum_{i=1}^k L_{WQ}(\eta - t_i) P_i(\xi, t_i); \quad \varphi^* = - \sum_{i=1}^k L_{\varphi Q}(\eta - t_i) P_i(\xi, t_i); \\ M^* &= - \sum_{i=1}^k L_{MQ}(\eta - t_i) P_i(\xi, t_i); \quad Q^* = - \sum_{i=1}^k L_{QQ}(\eta - t_i) P_i(\xi, t_i), \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

где  $P_i(\xi, t_i) = \frac{h^3}{D} q_i(\xi, t_i)$ ;

- сосредоточенный по  $\eta$  и распределенный по  $\xi$  изгибающий момент  $m_i(\xi, t_i)$

$$\begin{aligned} W^* &= - \sum_{i=1}^k L_{WM}(\eta - t_i) P_i(\xi, t_i); \quad \varphi^* = - \sum_{i=1}^k L_{\varphi M}(\eta - t_i) P_i(\xi, t_i); \\ M^* &= - \sum_{i=1}^k L_{MM}(\eta - t_i) P_i(\xi, t_i); \quad Q^* = - \sum_{i=1}^k L_{QM}(\eta - t_i) P_i(\xi, t_i), \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

где  $P_i(\xi) = \frac{h}{D} m_i(\xi, t_i)$ .

Так, для случая сосредоточенной по  $\eta$  (в сечении  $\eta = t$ ) и равномерно распределенной по  $\xi$  поперечной нагрузки (при  $q(\xi) = \frac{P(\eta, \xi)D}{h^3} = \text{const}$ ), частное решение  $W^*$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
W^* &= -L_{WP}P = -L_{WQ}(\eta - t)P = \frac{-1}{a^2 - b^2} \left( \frac{\sin a(\eta - t)}{a} - \frac{\sin b(\eta - t)}{b} \right) P \\
&= \frac{(\eta - t)\sqrt{2N_2} - \sin\sqrt{2N_2}(\eta - t)}{2N_2\sqrt{2N_2}} P.
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

В случае распределенной по  $\eta$  нагрузки  $q(\xi, t)$  (рис. 2.2.2),  $m(\xi, t)$ , которую можно рассматривать как совокупность сосредоточенных по  $\eta$  сил, для загруженного участка получим:

для поперечной нагрузки  $q(\xi, t)$ :

$$\begin{aligned}
W^* &= - \int_c^\eta L_{WQ}(\eta - t)P(\xi, t)dt; & \varphi_y^* &= - \int_c^\eta L_{\varphi Q}(\eta - t)P(\xi, t)dt; \\
M_y^* &= - \int_c^\eta L_{MQ}(\eta - t)P(\xi, t)dt; & Q_y^* &= - \int_c^\eta L_{QQ}(\eta - t)P(\xi, t)dt;
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

для изгибающего момента  $m(\xi, t)$ :

$$\begin{aligned}
W^* &= - \int_c^\eta L_{WM}(\eta - t)P(\xi, t)dt; & \varphi_y^* &= - \int_c^\eta L_{\varphi M}(\eta - t)P(\xi, t)dt; \\
M_y^* &= - \int_c^\eta L_{MM}(\eta - t)P(\xi, t)dt; & Q_y^* &= - \int_c^\eta L_{QM}(\eta - t)P(\xi, t)dt.
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Так, для нагрузки  $P(\xi) = \frac{h^3 q(\xi)}{D} = \text{const}$ , равномерно распределенной по пластинке вдоль оси  $\eta$ , функция-оператор  $L_{WP}$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
W^* &= -L_{WP}P(\xi) = - \int_0^\eta L_{WQ}(\eta - t)P(\xi) dt = \\
&= - \int_0^\eta \frac{1}{a^2 - b^2} \left( \frac{\sin a(\eta - t)}{a} - \frac{\sin b(\eta - t)}{b} \right) dt P(\xi) = \\
&= \frac{-1}{a^2 - b^2} \left( \frac{1 - \cos a\eta}{a^2} - \frac{1 - \cos b\eta}{b^2} \right) P(\xi) = \left( \frac{\cos\sqrt{2N_2}\eta - 1}{4N_2^2} + \frac{\eta^2}{4N_2} \right) P(\xi) =
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

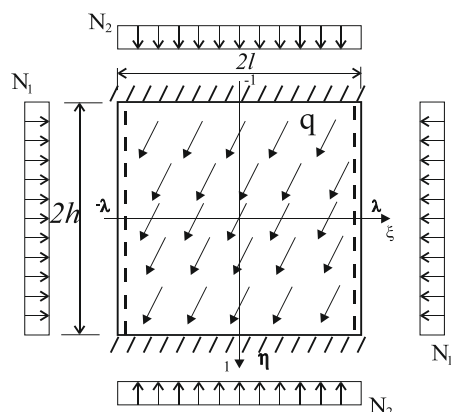
$$\alpha^2 \left( \frac{(3N_1 - 4N_2)(\cos\sqrt{2N_2}\eta - 1)}{8N_2^4} + \frac{(N_1 - 2N_2)\eta \sin\sqrt{2N_2}\eta}{8N_2^3\sqrt{2N_2}} + \frac{(N_1 - N_2)\eta^2}{4N_2^3} - \frac{N_1\eta^4}{48N_2^2} \right) P(\xi)..$$

При одновременном действии распределенной и сосредоточенной по  $\eta$  силы интегралы в формулах (2.2.5) или (2.2.6) следует понимать в смысле Стильтьеса, т.е. надо присоединить к ним последние члены (суммы) выражений (2.2.2) или (2.2.3), соответственно. После построения матрицы начальных функций задача может считаться решенной, если известны все начальные функции, необходимо лишь выполнить дифференциальные операции над ними. Для этого предварительно необходимо записать операторы  $L(\alpha)$  в виде степенных рядов.

### 2.3 Нахождение начальных функций из граничных условий на продольных сторонах пластинки, параллельных начальной линии.

Покажем порядок нахождения начальных функций (без ограничения общности) на примере пластинки с двумя защемленными противоположными продольными и шарнирно опертыми поперечными кромками (рисунок. 2.3.1) под действием поперечной равномерно - распределенной нагрузки  $q$  и сжимающих сил  $N_1$  и  $N_2$ , лежащих в ее срединной плоскости.

Две начальные функции, как правило, известны из условий на начальной линии  $\eta=0$ , остальные разыскиваются из граничных условий на продольной стороне параллельной кромке  $\eta=1$ .



Из условия симметрии на начальной линии следует равенство нулю угла поворота и перерезывающей поперечной силы:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0; \\ Q_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Рисунок. 2.3.1 – Расчетная схема. Тогда, используя выражения (2.2.1), граничные условия закрепления продольных кромок  $W(1; \xi) = \varphi_y(1; \xi) = 0$  запишем в виде:

$$\begin{cases} L_{WW}^1 W_0 + L_{WM}^1 M_0 = -L_{WP}^1 P = \psi_1(\xi); \\ L_{\varphi W}^1 W_0 + L_{\varphi M}^1 M_0 = -L_{\varphi P}^1 P = \psi_2(\xi), \end{cases} \quad (2.3.2)$$

где индекс 1 означает, что в соответствующие операторы вместо  $\eta$  нужно подставить его значение, равное единице.

Решение неоднородной системы двух дифференциальных уравнений (2.3.2) будем искать в виде:

$$W_0 = \overline{W}_0 + W_0^*; \quad M_0 = \overline{M}_0 + M_0^*, \quad (2.3.3)$$

где  $\overline{W}_0$  и  $\overline{M}_0$  - общее решение соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases} L_{WW}^1 \overline{W}_0 + L_{WM}^1 \overline{M}_0 = 0 \\ L_{\varphi W}^1 \overline{W}_0 + L_{\varphi M}^1 \overline{M}_0 = 0, \end{cases} \quad (2.3.4)$$

а  $W_0^*$  и  $M_0^*$  - частные интегралы неоднородной системы (2.3.2).

Для определения общего решения однородной системы (2.3.4) введем новую неизвестную функцию  $V(\xi)$ , по формулам:

$$\begin{cases} \overline{W}_0 = -L_{WM}^1 V(\xi) \\ \overline{M}_0 = L_{WW}^1 V(\xi). \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Тогда в системе (2.3.4) первое уравнение удовлетворяется тождественно, а второе принимает следующий вид:

$$(L_{\varphi M}^1 L_{WW}^1 - L_{\varphi W}^1 L_{WM}^1) V(\xi) = 0. \quad (2.3.6)$$

Или, обозначив  $(L_{\varphi M}^1 L_{WW}^1 - L_{\varphi W}^1 L_{WM}^1) = L^1(\alpha)$ ,

$$L^1(\alpha) V(\xi) = 0. \quad (2.3.8)$$

Подставив в (2.3.6) операторы  $L_{ik}^1$  из табл. 2.1.1 и приведя подобные члены, получим:

$$L^1(\alpha) = \frac{1}{a^2(\alpha) - b^2(\alpha)} \begin{pmatrix} b(\alpha) \sin b(\alpha) \cos a(\alpha) \\ -a(\alpha) \sin a(\alpha) \cos b(\alpha) \end{pmatrix} = -\frac{\sin \sqrt{2N_2}}{\sqrt{2N_2}} +$$

$$+\alpha^2 \left[ \frac{\eta \cos \sqrt{2N_2} \eta (3N_1 - 2N_2)}{4N_2^2} - \frac{\sin \sqrt{2N_2} \eta (3N_1 - 2N_2)}{4N_2^2 \sqrt{2N_2}} \right] - \dots, \quad (2.3.9)$$

$$+ \frac{\eta^2 \sin \sqrt{2N_2} \eta N_1}{2N_2 \sqrt{2N_2}}$$

где  $a(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$ , - определяются по формулам (2.1.8).

Таким образом, однородная система сводится к одному линейному дифференциальному уравнению (2.3.8) бесконечного порядка (трансцендентному) с постоянными коэффициентами относительно разрешающей функции, которое можно назвать разрешающим уравнением.

Решение разрешающего уравнения (2.3.8) естественно искать в виде:

$$V(\xi) = C_n e^{r_n \xi}. \quad (2.3.10)$$

Для нахождения неизвестного показателя степени  $r_n$  необходимо решить соответствующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} L^1(r_n) &= \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} [b_n \sin b_n \cos a_n - a_n \sin a_n \cos b_n] = \\ &= -\frac{\sin(\sqrt{2N_2})}{\sqrt{2N_2}} + r_n^2 \left[ \frac{\eta (3N_1 - 2N_2) \cos \sqrt{2N_2} \eta}{4N_2^2} - \frac{(3N_1 - 2N_2) \sin \sqrt{2N_2} \eta}{4N_2^2 \sqrt{2N_2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta^2 N_1 \sin \sqrt{2N_2} \eta}{2N_2 \sqrt{2N_2}} \right] - \dots = 0, \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

которое получается заменой в дифференциальном операторе  $L^1(\alpha)$  (2.3.9) символа дифференцирования  $\alpha$  на  $r_n$ . Поскольку характеристическое уравнение в общем случае всегда является трансцендентным, оно имеет бесконечное множество комплексных корней  $r_n$ . Поэтому можно записать  $V(\xi)$  в виде:

$$V(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{r_n \xi}, \quad (2.3.12)$$

если все корни характеристического уравнения – простые, если же есть кратные корни, то необходимо в (2.3.12) добавить члены с полиномиальными множителями.

Очевидно, что в данном случае помимо  $r_n = (c_n + id_n)$  корнями характеристического уравнения (2.3.12) будут также являться и  $-r_n = -(c_n + id_n)$  и сопряженные им величины  $\pm r_n = \pm(c_n \pm id_n)$ , следовательно разрешающую функцию  $V(\xi)$  можно записать в виде:



$$V(\xi) = \sum_{n=1..}^{\infty} [V_n(r_n, \xi) + \bar{V}_n(\bar{r}_n, \xi)], \quad (2.3.13)$$

где  $V_n(r_n, \xi) = A_n ch r_n \xi + B_n sh r_n \xi$ ;  $\bar{V}_n(r_n, \xi) = \bar{A}_n ch \bar{r}_n \xi + \bar{B}_n sh \bar{r}_n \xi$ .

Выражение (2.1.33) можно переписать более кратко:

$$V(\xi) = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} V_n(r_n, \xi). \quad (2.3.14)$$

Подставляя найденное выражение разрешающей функции (2.3.14) в формулы (2.3.5), получим общее решение однородной системы (2.3.4):

$$\bar{W}_0 = -2Re \sum_n^{\infty} [L_{WM}^1(r_n) V_n(r_n, \xi)]; \quad (2.3.15)$$

$$\bar{M}_0 = 2Re \sum_n^{\infty} [L_{WW}^1(r_n) V_n(r_n, \xi)]. \quad (2.3.16)$$

Подставив выражения (2.3.1), (2.3.15) и (2.3.16) в (2.1.12) и выполнив операции получим общее решение однородного уравнения (2.1.4) в виде:

$$\bar{W} = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (-L_{WM}^1 L_{WW} + L_{WM} L_{WW}^1) V_n(r_n, \xi), \quad (2.3.17)$$

или

$$\bar{W} = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \xi + B_n ch r_n \xi) F_n(\eta), \quad (2.3.18)$$

где функция  $F_n(\eta)$  зависит от условий закрепления продольных краев пластинки. Для рассматриваемой пластинки, имеющей жесткое защемление по продольным кромкам, функция  $F_n(\eta)$ , будет удовлетворять следующим граничным условиям на продольных кромках:

$$F_n(1) = F_n(-1) = F_n'(1) = F_n'(-1) = 0, \quad (2.3.19)$$

и имеет вид:

$$F_n(\eta) = \frac{\cos b_n \cos a_n \eta - \cos a_n \cos b_n \eta}{a_n^2 - b_n^2}, \quad (2.3.20)$$

где  $a_n = \sqrt{N_2 + r_n^2 + \Delta_n}$ ;  $b_n = \sqrt{N_2 + r_n^2 - \Delta_n}$ ;  $\Delta_n = \sqrt{N_2^2 - r_n^2(2N_1 - 2N_2)}$ .

Кроме того, функция  $F_n(\eta)$  должна удовлетворять следующему однородному дифференциальному уравнению:

$$F_n^{IV}(\eta) + 2(r_n^2 + N_2)F_n''(\eta) + (r_n^4 + 2r_n^2 N_1)F_n(\eta) = 0. \quad (2.3.21)$$

Теперь остановимся на отыскании частного решения неоднородного уравнения (2.3.2).

Для определения частных решений системы (2.3.2) введем новые неизвестные функции  $Z_1(\xi)$ , и  $Z_2(\xi)$ , по формулам:

$$\begin{cases} W_0^* = L_{\varphi M}^1 Z_1 - L_{WM}^1 Z_2; \\ M_0^* = -L_{\varphi W}^1 Z_1 + L_{WW}^1 Z_2. \end{cases} \quad (2.3.22)$$

В результате подстановки выражений (2.3.22) соответственно в систему (2.3.2) получим два неоднородных уравнения:

$$\begin{cases} L^1(\alpha)Z_1 = -L_{WP}^1 P = \psi_1(\xi); \\ L^1(\alpha)Z_2 = -L_{\varphi P}^1 P = \psi_2(\xi). \end{cases} \quad (2.3.23)$$

каждое из которых зависит только от одной неизвестной функции.

Оператор в левой части уравнений (2.3.23) представляет собой линейный дифференциальный оператор бесконечно высокого порядка с постоянными коэффициентами, и будет точно таким же, как и в однородном уравнении (2.3.11) относительно функции  $V(\xi)$ .

Вид функций  $\psi_1(\xi)$  и  $\psi_2(\xi)$ , стоящих в правых частях уравнений (2.3.23), зависит от характера распределения нагрузки. Чтобы найти их необходимо выполнить соответствующую дифференциальную операцию над нагрузкой.

Если на рассматриваемую пластинку действует равномерно -распределенная нагрузка  $P = \frac{q h^3}{D} \text{const}$ , то функции операторы  $L_{WP}^1 P$  и  $L_{\varphi P}^1 P$ , являющиеся правыми частями уравнений (2.3.2), имеют вид:

$$\begin{aligned} -L_{WP}^1 P &= \int_0^\eta L_{WQ}(\eta - t)P(\xi, t)dt = \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} \left( \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} - \frac{1 - \cos b_n}{b_n^2} \right) P = \\ &= \left( -\frac{\cos \sqrt{2N_2} - 1}{4N_2^2} - \frac{1}{4N_2} + \alpha^2 ( \quad ) \dots \right) P; \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

$$\begin{aligned}
-L_{\varphi P}^1 P &= \int_0^{\eta} L_{\varphi Q}(\eta - t) P(\xi, t) dt = \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} \left( \frac{\sin a_n}{a_n} - \frac{\sin b_n}{b_n} \right) P = \\
&= \left( \frac{\sin \sqrt{2N_2} - \sqrt{2N_2}}{2N_2 \sqrt{2N_2}} + \alpha^2 ( \ ) \dots \right) P.
\end{aligned} \tag{2.3.25}$$

Учитывая, что оператор  $\alpha$  представляет собой частную производную по  $\xi$ , т.е.  $-\frac{\partial^n}{\partial \xi^n}$  и тот факт, что производная от постоянной равна нулю  $\frac{\partial}{\partial \xi} const = 0$ , получим:

$$\psi_1(\xi) = -L_{WP}^1 P = -\frac{1 - \cos \sqrt{2N_2} - N_2}{4N_2^2} P; \tag{2.3.26}$$

$$\psi_2(\xi) = -L_{\varphi P}^1 P = -\frac{\sin \sqrt{2N_2} - \sqrt{2N_2}}{2N_2 \sqrt{2N_2}} P. \tag{2.3.27}$$

Из (2.3.23), следует, что неизвестные функции  $Z_1$  и  $Z_2$  при постоянных частях в выражении, определяются:

$$Z_1 = -\psi_1(\xi) = \frac{1 - \cos \sqrt{2N_2} - N_2}{2N_2 \sin \sqrt{2N_2} \sqrt{2N_2}} P; \tag{2.3.28}$$

$$Z_2 = -\psi_2(\xi) = \frac{\sin \sqrt{2N_2} - \sqrt{2N_2}}{2N_2 \sin \sqrt{2N_2}} P. \tag{2.3.29}$$

Подставив  $Z_1$  и  $Z_2$  в (2.3.22) и выполнив все дифференциальные операции (представив операторы при этом в виде бесконечных рядов), можно определить частные начальные функции  $W_0^*$  и  $M_0^*$ ,

$$\begin{cases} W_0^* = \frac{1}{4N_2} + \frac{\cos \sqrt{2N_2} - 1}{2N_2 \sqrt{2N_2} \sin \sqrt{2N_2}} \\ M_0^* = \frac{\sin \sqrt{2N_2} - \sqrt{2N_2}}{2N_2 \sin \sqrt{2N_2}}. \end{cases} \tag{2.3.30}$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения (2.1.1) определяется формулой:

$$W_{(\eta)}^* = L_{WW}(\alpha \eta)W_0^* + L_{WM}(\alpha \eta)M_0^* + L_{WP}(\alpha \eta)P \text{ или} \quad (2.3.31)$$

$$W_{(\eta)}^* = \left( \frac{1}{4N_2} + \frac{\cos\sqrt{2N_2} - 1}{2N_2\sqrt{2N_2}\sin\sqrt{2N_2}} \right) P + \left( \frac{\cos\sqrt{2N_2} - 1}{2N_2} \right) \left( \frac{\sin\sqrt{2N_2} - \sqrt{2N_2}}{2N_2\sin\sqrt{2N_2}} \right) P \\ + \left( -\frac{\cos\sqrt{2N_2} - 1}{4N_2^2} - \frac{1}{4N_2} \right) P.$$

Рассмотрим три случая нахождения частного решения, когда:

1.  $N_1=N, N_2=0.$
2.  $N_1=0, N_2=N.$
3.  $N_1=N, N_2=N.$

В первом случае ( $N_1=N, N_2=0$ ), когда пластинка находится под действием нагрузки  $N_1$  имеем:  $a = \sqrt{\alpha^2 + \Delta}; b = \sqrt{\alpha^2 - \Delta}; \Delta = \sqrt{-\alpha^2 2N_1}.$  (2.3.32)

Получим следующие выражения:

$$L(\alpha) = -1; \quad -L_{WP}^1 P = \frac{P}{24}; \quad -L_{\varphi P}^1 P = \frac{P}{6}; \quad W_0^* = -\frac{P}{24}; \quad = -\frac{P}{6}. \quad (2.3.33)$$

Выполнив дифференциальные операции над  $W_0^*, M_0^*$  и  $P$  получим частное решение:

$$W_{(\eta)}^* = \frac{P}{24}(\eta^4 - 2\eta^2 + 1). \quad (2.3.34)$$

Полученное частное решение удовлетворяет дифференциальному уравнению задачи и граничным условиям при  $\eta=0$ :

$$\varphi_y = 0; \quad \varphi_y = \frac{1}{h} \frac{\partial W_{(\eta)}^*}{\partial \eta} = \frac{P}{24}(4\eta^3 - 4\eta) = 0; \quad (2.3.35)$$

$$Q_y = 0; \quad Q_y = \frac{D}{h^3} \left( \frac{\partial^3 W_{(\eta)}^*}{\partial \eta^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W_{(\eta)}^*}{\partial \eta \partial \xi^2} \right) = \frac{P}{24}(24\eta) = 0 \quad (2.3.36)$$

и при  $\eta=\pm 1$ :

$$W_{(\eta=\pm 1)}^* = \frac{P}{24}(\eta^4 - 2\eta^2 + 1) = 0; \quad (2.3.37)$$

$$\varphi_y = 0; \varphi_y = \frac{1}{h} \frac{\partial W_{(\eta)}^*}{\partial \eta} = \frac{P}{24} (4\eta^3 - 4\eta) = 0. \quad (2.3.38)$$

Для второго случая, при действии только продольной силы  $N_2$  ( $N_1=0, N_2=N$ ).

Получим следующие выражения для  $a = \sqrt{2N}; b = 0; \Delta = N$ .

$$L(\alpha) = -\frac{\sin \sqrt{2N}}{\sqrt{2N}}; -L_{WP}^1 P = \frac{P}{2N} \left( \frac{\cos \sqrt{2N} - 1}{\sqrt{2N} \sin \sqrt{2N}} - \frac{1}{2} \right); -L_{\varphi P}^1 P = \frac{P}{2N} \left( \frac{\sin \sqrt{2N} - \sqrt{2N}}{\sqrt{2N} \sin \sqrt{2N}} \right); \quad (2.3.39)$$

$$W_0^* = \frac{P}{2N} \left[ \frac{\cos \sqrt{2N} - 1}{\sqrt{2N} \sin \sqrt{2N}} - 0.5 \right]; \quad M_0^* = \frac{P}{\sqrt{2N} \sin \sqrt{2N}} \left( \frac{\sin \sqrt{2N}}{\sqrt{2N}} - 1 \right). \quad (2.3.40)$$

Выполнив дифференциальные операции над  $W_0^*; M_0^*$  и  $P$  получим:

$$W_{(\eta)}^* = P \left[ \frac{\cos \sqrt{2N} \eta - \cos \sqrt{2N}}{2N \sqrt{2N} \sin \sqrt{2N}} - \frac{1 - \eta^2}{4N} \right]. \quad (2.3.41)$$

Полученное частное решение удовлетворяет дифференциальному уравнению задачи и граничным условиям при  $\eta=0$ :

$$\varphi_y = 0; \quad \varphi_y = \frac{1}{h} \frac{\partial W_{(\eta)}^*}{\partial \eta} = P \left( \frac{-\sqrt{2N} \sin \sqrt{2N} \eta}{2N \sqrt{2N} \sin \sqrt{2N} \eta} + \frac{2\eta}{4N} \right) = 0; \quad (2.3.42)$$

$$Q_y = 0; \quad Q_y = \frac{D}{h^3} \left( \frac{\partial^3 W_{(\eta)}^*}{\partial \eta^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W_{(\eta)}^*}{\partial \eta \partial \xi^2} \right) = P \left( \frac{\sin \sqrt{2N} \eta}{\sin \sqrt{2N}} \right) = 0, \quad (2.3.43)$$

и при  $\eta=\pm 1$ :

$$W_{(\eta=1)}^* = P \left[ \frac{\cos \sqrt{2N} \eta - \cos \sqrt{2N}}{2N \sqrt{2N} \sin \sqrt{2N}} - \frac{1 - \eta^2}{4N} \right] = 0; \quad (2.3.44)$$

$$\varphi_y = 0; \quad \varphi_y = \frac{1}{h} \frac{\partial W_{(\eta)}^*}{\partial \eta} = P \left( \frac{-\sin \sqrt{2N} \eta}{2N \sin \sqrt{2N}} + \frac{\eta}{2N} \right) = 0. \quad (2.3.45)$$

Для третьего случая, при сжатии в двух направлениях  $N_1=N, N_2=N$ .

Получим следующие выражения для  $a = \sqrt{2N}; b = 0; \Delta = N$ .

$$L(\alpha) = -\frac{\sin \sqrt{2N}}{\sqrt{2N}}; -L_{WP}^1 P = \frac{P}{2N} \left( \frac{\cos \sqrt{2N} - 1}{\sqrt{2N} \sin \sqrt{2N}} - \frac{1}{2} \right); -L_{\varphi P}^1 P = \frac{P}{2N} \left( \frac{\sin \sqrt{2N} - \sqrt{2N}}{\sqrt{2N} \sin \sqrt{2N}} \right); \quad (2.3.46)$$

$$W_0^* = \frac{P}{2N} \left[ \frac{\cos\sqrt{2N} - 1}{\sqrt{2N} \sin\sqrt{2N}} - 0.5 \right]; \quad M_0^* = \frac{P}{\sqrt{2N} \sin\sqrt{2N}} \left( \frac{\sin\sqrt{2N}}{\sqrt{2N}} - 1 \right). \quad (2.3.47)$$

Выполнив дифференциальные операции над  $W_0^*$ ;  $M_0^*$  и  $P$  получим:

$$W_{(\eta)}^* = P \left[ \frac{\cos\sqrt{2N}\eta - \cos\sqrt{2N}}{2N\sqrt{2N}\sin\sqrt{2N}} - \frac{1 - \eta^2}{4N} \right]. \quad (2.3.48)$$

Полученное частное решение удовлетворяет дифференциальному уравнению задачи и граничным условиям при  $\eta=0$ :

$$\varphi_y = 0; \quad \varphi_y = \frac{1}{h} \frac{\partial W_{(\eta)}^*}{\partial \eta} = P \left( \frac{-\sqrt{2N} \sin\sqrt{2N}\eta}{2N\sqrt{2N} \sin\sqrt{2N}} + \frac{2\eta}{4N} \right) = 0; \quad (2.3.49)$$

$$Q_y = 0; \quad Q_y = \frac{D}{h^3} \left( \frac{\partial^3 W_{(\eta)}^*}{\partial \eta^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W_{(\eta)}^*}{\partial \eta \partial \xi^2} \right) = P \left( \frac{\sin\sqrt{2N}\eta}{\sin\sqrt{2N}} \right) = 0 \quad (2.3.50)$$

и при  $\eta=\pm 1$ :

$$W_{(\eta=1)}^* = P \left[ \frac{\cos\sqrt{2N} - \cos\sqrt{2N}}{2N\sqrt{2N} \sin\sqrt{2N}} - \frac{1 - 1^2}{4N} \right] = 0; \quad (2.3.51)$$

$$\varphi_y = 0; \quad \varphi_y = \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \eta} = P \left( \frac{-\sin\sqrt{2N}\eta}{2N \sin\sqrt{2N}} + \frac{\eta}{2N} \right) = 0. \quad (2.3.52)$$

В результате сложения частного решения неоднородного уравнения (2.1.1) с общим решением соответствующего однородного уравнения получим решение задачи сжато изогнутой упругой пластинки, которое в общем случае может быть записано в виде:

$$W = h \left\{ W_{(\eta)}^* + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \xi + B_n ch r_n \xi) F_n(\eta) \right\} = \quad (2.3.53)$$

$$= h \left\{ W_{(\eta)}^* + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \xi + B_n ch r_n \xi) \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} (\cos b_n \cos a_n \eta - \cos a_n \cos b_n \eta) \right\}.$$

В выражении (2.3.53)  $r_n$  - комплексные корни характеристического уравнения (2.3.11), получаемого при отыскании начальных функций, удовлетворяющих граничным условиям на продольных краях пластинки,

-  $A_n$  и  $B_n$  - комплексные произвольные постоянные, определяемые из

граничных условий на поперечных сторонах пластинки, параллельных оси  $\eta$ .

- функция  $F_n(\eta)$  определяется типом граничных условий на краях параллельных начальной линии. При этом они обладают свойством обобщенной ортогональности.

Аналогично могут быть получены остальные величины, определяющие напряженно- деформированное состояние пластинки. Например:

$$\varphi_x = \varphi_x^* + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n ch r_n \xi + B_n sh r_n \xi) r_n F_n(\eta), \quad (2.3.54)$$

где  $\varphi_x^* = \frac{\partial W^*}{\partial \xi} = \alpha W^* = 0$  (т. к.  $W^* = f(\eta)$ );

$$M_x = -\frac{D}{h} \left\{ M_x^* + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \xi + B_n ch r_n \xi) (r_n^2 F_n(\eta) + \nu F_n''(\eta)) \right\}, \quad (2.3.55)$$

где  $M_x^* = \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} = \alpha^2 W^* + \nu W^{*''}$  и т.д.

Полученное решение точно удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению, граничным условиям на продольных кромках и содержит  $4n$  произвольных постоянных, которые определяются граничными условиями на поперечных сторонах пластинки. Для их нахождения может быть использовано соотношение ортогональности функций  $F_n(\eta)$ , которое будет получено ниже.

При отсутствии поперечной нагрузки ( $W^* = 0$ ), однородное решение задачи может быть использовано для решения задачи устойчивости пластинок, которое определяет форму и напряженно- деформированное состояние сжатой пластинки после потери устойчивости.

**2.4 Соотношение обобщенной ортогональности однородных решений и его использование для удовлетворения граничным условиям на поперечных сторонах сжато-изогнутой пластинки.**

**2.4.1** **Случай, когда граничные условия могут быть удовлетворены точно.**

В работе [19] было получено соотношение обобщенной ортогональности (1.2.6) для сжато-изогнутых пластинок, которое справедливо лишь в случае, когда

на продольных сторонах нагруженных сжимающей силой  $N_2$ , имеются какие-либо кинематические связи, препятствующие перемещениям или поворотам этих сторон пластинок, - заделки или шарнирные опоры.

Рассмотрим вывод нового соотношения обобщенной ортогональности, справедливого для любых граничных условий, в том числе и для случая изгиба пластинки со свободными от связей продольными кромками при наличии сжимающих сил в одном и двух направлениях ее срединной плоскости и при любых однородных граничных условиях на продольных краях пластинки, в том числе и свободных от закрепления.

Как было показано ранее, решение уравнения (2.1.1) при  $N_1$  и  $N_2 = \text{const}$ , полученное методом начальных функций, точно удовлетворяет граничным условиям на двух противоположных краях пластинки, параллельных оси  $O\xi$ .

Предварительно запишем условия, которым удовлетворяют функции  $F_n(\eta)$  однородного решения, при различных условиях закрепления продольных краев пластинки при  $\eta=0$  и  $\eta=1$ .

1) Жестко защемленный край:

$$W|_{\eta=0;1} = \varphi_y|_{\eta=0;1} = 0; \Rightarrow F_n(\eta = 0; 1) = F_n'(\eta = 0; 1) = 0. \quad (2.4.1)$$

2) Шарнирное опирание:

$$W|_{\eta=0;1} = M_y|_{\eta=0;1} = 0; \Rightarrow F_n(\eta = 0; 1) = F_n''(\eta = 0; 1) = 0. \quad (2.4.2)$$

3) Свободный край:

$$M_y|_{\eta=0;1} = 0; \Rightarrow F_n''(\eta = 0; 1) + \nu r_n^2 F_n'(\eta = 0; 1) = 0; \quad (2.4.3)$$

$$Q_y|_{\eta=0;1} = 0; \Rightarrow F_n'''(\eta = 0; 1) + [(2 - \nu)r_n^2 + 2N_2]F_n'(\eta = 0; 1) = 0.$$

4) На краю имеется ползун:

$$\varphi_y|_{\eta=0;1} = 0; \Rightarrow F_n'(\eta = 0; 1) = 0; \quad (2.4.4)$$



$$Q_y|_{\eta=0;1} = 0; \Rightarrow F_n'''(\eta = 0; 1) = 0.$$

Для получения новой формы соотношения обобщенной ортогональности умножим все члены уравнения (2.3.21) на  $r_k^2 F_k(\eta) d\eta$ , вычитаем уравнение (2.3.21), записанное для функции  $F_k(\eta)$ , умноженное на  $r_n^2 F_n(\eta) d\eta$ , и интегрируем по  $\eta$  в интервале от 0 до 1.

$$\begin{aligned} r_k^2 \int_0^1 F_k(\eta) F_n^{IV}(\eta) d\eta - r_n^2 \int_0^1 F_n(\eta) F_k^{IV}(\eta) d\eta + 2(r_n^2 + N_2) r_k^2 \int_0^1 F_k(\eta) F_n''(\eta) d\eta - \\ - 2(r_k^2 + N_2) r_n^2 \int_0^1 F_n(\eta) F_k''(\eta) d\eta + r_n^2 r_k^2 (r_n^2 + 2N_1) \int_0^1 F_n(\eta) F_k(\eta) d\eta \\ - r_n^2 r_k^2 (r_n^2 + 2N_1) \int_0^1 F_n(\eta) F_k(\eta) d\eta = 0. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Интегрируя по частям первые четыре слагаемые уравнения (2.4.5) и приведя подобные члены, получим:

$$\begin{aligned} (r_k^2 - r_n^2) \int_0^1 [F_n''(\eta) F_k''(\eta) - 2N_2 F_n'(\eta) F_k'(\eta) - r_n^2 r_k^2 F_n(\eta) F_k(\eta)] d\eta + \\ + \{r_k^2 [F_k(\eta) F_n'''(\eta) - F_k'(\eta) F_n''(\eta)]|_0^1 - r_n^2 [F_n(\eta) F_k'''(\eta) - F_n'(\eta) F_k''(\eta)]|_0^1 + \\ + 2r_k^2 (r_n^2 + N_2) F_k(\eta) F_n'(\eta)|_0^1 - 2r_n^2 (r_k^2 + N_2) F_n(\eta) F_k'(\eta)|_0^1\} = 0. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Используя соотношения (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3), (2.4.4), нетрудно убедиться, что все внеинтегральные члены в полученном уравнении (2.4.6) обращаются в ноль при всех возможных однородных граничных условиях на краю  $\eta=0$  или  $\eta=1$ . Откуда следует соотношение обобщенной ортогональности для собственных функций  $F_n(\eta)$  однородного решения задачи, справедливое для всех возможных условий закрепления продольных краев сжатой пластинки:

$$\int_0^1 (F_n''(\eta)F_k''(\eta) - 2N_2F_n'(\eta)F_k'(\eta) - r_n^2r_k^2F_n(\eta)F_k(\eta)) d\eta = \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ J_n & (n = k), \end{cases} \quad (2.4.7)$$

где  $J_n = \int_0^1 (F_n''^2(\eta) - 2N_2F_n'^2(\eta) - r_n^4F_n^2(\eta)) d\eta$ .

Соотношение (2.4.7) позволяет разложить две функции  $f_1(\eta)$  и  $f_2(\eta)$  (в том числе и ноль) в ряды по функциям  $F_n(\eta)$ :

$$f_1(\eta) = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n(\eta); \quad (2.4.8)$$

$$f_2(\eta) = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n r_n^2 F_n(\eta). \quad (2.4.9)$$

с одним и тем же коэффициентом  $A_n$ , отличным от нуля, определяемым по формуле:

$$2ReA_n = \frac{1}{J_n} \left\{ \int_0^1 f_1''(\eta)F_n''(\eta) d\eta - 2N_2 \int_0^1 f_1'(\eta)F_n'(\eta) d\eta - r_n^2 \int_0^1 f_2(\eta)F_n(\eta) d\eta \right\}, \quad (2.4.10)$$

Для получения формулы (2.4.10) продифференцируем один раз выражение (2.4.8), умножим на  $-2N_2F_k'(\eta)d\eta$  и проинтегрируем по  $\eta$  от 0 до 1:

$$-2N_2 \int_0^1 f_1'(\eta) F_k'(\eta) d\eta = -2N_2 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 F_n'(\eta) F_k'(\eta) d\eta. \quad (2.4.11)$$

Продифференцируем дважды выражение (2.4.8), умножим на  $F_k''(\eta)d\eta$  и проинтегрируем по  $\eta$  от 0 до 1:

$$\int_0^1 f_1''(\eta) F_k''(\eta) d\eta = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 F_n''(\eta) F_k''(\eta) d\eta. \quad (2.4.12)$$

Умножим выражение (2.4.9) на  $-r_k^2 F_k(\eta)d\eta$  и проинтегрируем по  $\eta$  от 0 до 1:

$$-r_k^2 \int_0^1 f_2(\eta) F_k(\eta) d\eta = -2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n r_n^2 r_k^2 \int_0^1 F_n(\eta) F_k(\eta) d\eta. \quad (2.4.13)$$

Сложив (2.4.11), (2.4.12) и (2.4.13), получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f_1''(\eta) F_k''(\eta) d\eta - 2N_2 \int_0^1 f_1'(\eta) F_n'(\eta) d\eta - r_k^2 \int_0^1 f_2(\eta) F_k(\eta) d\eta = \\ & = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 (F_n''(\eta) F_k''(\eta) - 2N_2 F_n'(\eta) F_k'(\eta) - r_n^2 r_k^2 F_n(\eta) F_k(\eta)) d\eta. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

На основании соотношения (2.4.7) интеграл в правой части соотношения (2.4.14) для всех членов ряда, кроме  $n=k$ , равен нулю, откуда следует формула (2.4.10).

Покажем теперь, каким образом соотношения (2.4.8), (2.4.9), (2.4.10) могут быть использованы для удовлетворения граничным условиям на поперечных сторонах пластинки, т.е. для нахождения коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  в решении (2.1.1) для сжато-изогнутой пластинки.

Рассмотрим вначале случай, когда коэффициенты могут быть вычислены точно. Допустим, что на краю  $\xi=0$  пластинки задан прогиб:

$$W_{(\xi=0)} = hZ(\eta) \quad (2.4.15)$$

и изгибающий момент:

$$M_{x(\xi=0)} = \frac{D}{h} X(\eta). \quad (2.4.16)$$

Раскрывая граничные условия на краю  $\xi=0$ , для чего подставим решение (2.3.53) в (2.4.15) и (2.4.16), в результате получим:

$$2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n(\eta) = -W_{(\eta)}^* + Z(\eta) = f_1(\eta); \quad (2.4.17)$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} B_n (r_n^2 F_n(\eta) + \nu F_n''(\eta)) = -\nu W_{(\eta)}^{*''} - X_{(\eta)}. \quad (2.4.18)$$

Дифференцируем дважды уравнение (2.4.17):

$$2\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n''(\eta) = -W_{(\eta)}^{*''} + Z_{(\eta)}'' = f_1''(\eta). \quad (2.4.19)$$

Умножим (2.4.19) на  $\nu$  и вычтем из (2.4.18)

$$2\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} B_n r_n^2 F_n(\eta) d\eta = -X_{(\eta)} - \nu Z_{(\eta)}'' = f_2(\eta). \quad (2.4.20)$$

Выражения (2.4.17) и (2.4.20) аналогичны (2.4.8) и (2.4.9), следовательно, коэффициент  $B_n$  вычисляется по формуле (2.4.10), в которую вместо  $f_1(\eta)$  и  $f_2(\eta)$  нужно подставить правые части (2.4.17) и (2.4.20). В результате получим:

$$2\operatorname{Re} B_n = \frac{1}{J_n} \left\{ \int_0^1 (Z_{(\eta)}'' - W_{(\eta)}^{*''}) F_n''(\eta) d\eta - 2N_2 \int_0^1 (Z_{(\eta)}' - W_{(\eta)}^{*'}) F_n'(\eta) d\eta + \right. \\ \left. + r_n^2 \int_0^1 (X_{(\eta)} + \nu Z_{(\eta)}'') F_n(\eta) d\eta \right\}. \quad (2.4.21)$$

Положив в (2.4.17)  $X_{(\eta)}=0$  и (2.4.18)  $Z_{(\eta)}=0$ , получим решение для пластинки, шарнирно опертой на краю  $\xi=0$ .

Аналогично могут быть вычислены коэффициенты в случае, когда на поперечных краях заданы угол поворота  $\varphi_{x(\xi=0;\lambda)} = Z_{1(\eta)}$  и поперечная нагрузка  $Q_{0(\xi=0;\lambda)} = \frac{D}{h^2} X_{1(\eta)}$ , перпендикулярная первоначальной плоскости пластинки. Частным случаем этих граничных условий является ползун, когда  $Z_{1(\eta)}=X_{1(\eta)}=0$ .

Таким образом, точное решение задачи об изгибе сжатой изогнутой пластинки при указанных граничных условиях на ее поперечных сторонах и произвольных однородных граничных условиях на продольных сторонах представлено формулой (2.3.53), в которой коэффициенты определяются выражением (2.4.10).

## 2.4.2 Приближенное удовлетворение граничным условиям методом сил и

**методом перемещений.**

Если на поперечных краях заданы отличные от указанных выше типов граничные условия, например, края  $\xi=0$  или  $\xi=\lambda$  защемлены или свободны, то коэффициенты решения (2.3.53) уже не могут быть определены точно.

Покажем один из возможных путей их приближенного нахождения для случая, когда край  $\xi=0$  защемлен. Граничные условия в этом случае запишутся в виде:

$$W_{(\xi=0)} = 0 \quad (2.4.22)$$

$$\varphi_{x(\xi=0)} = \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0. \quad (2.4.23)$$

Используем метод сил, врежем на краю  $\xi=0$  шарнир и приложим неизвестный момент  $M_{x(\xi=0)} = \frac{D}{h} X_{(\eta)}$ , который представим в виде разложения в ряд по некоторой полной системе функций с неизвестными коэффициентами например, тригонометрической. При этом желательно, чтобы эти функции удовлетворяли граничным условиям на продольных краях пластинки  $\eta=0$  и  $\eta=1$ . Этим требованиям удовлетворяют собственные функции,  $F_k(\eta)$  поэтому зададим:

$$X_{(\eta)} = \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} C_k F_k(\eta), \quad (2.4.24)$$

где  $C_k$  – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Для основной системы с шарнирно опертым краем  $\xi=0$ , загруженным моментом  $X_{(\eta)}$ , коэффициент  $B_n$  решения (2.3.53) определяется формулой (2.4.21), в которой нужно положить  $Z_{(\eta)}=0$ :

$$2ReB_n = \frac{1}{J_n} \left\{ - \int_0^1 W_{(\eta)}^{*''} F_n''(\eta) d\eta + 2N_2 \int_0^1 W_{(\eta)}^{*'} F_n'(\eta) d\eta + r_n^2 \int_0^1 X_{(\eta)} F_n(\eta) d\eta \right\}. \quad (2.4.25)$$

Решение (2.3.53) с коэффициентом (2.4.25) точно удовлетворяет граничному

условию (2.4.22). Неизвестные коэффициенты  $\mathbf{C}_k$  в разложении (2.4.24), которое входит в (2.4.25), могут быть найдены из граничного условия (2.4.23) – равенство нулю угла поворота на краю  $\xi=0$ . Для этого можно использовать метод ортогонализации функции  $\varphi_{x(\xi=0)}$  к полной системе функций, например, тех же  $F_n(\eta)$  или  $\sin n\pi\xi$  или  $\cos n\pi\xi$ :

$$\int_0^1 F_m(\eta)\varphi_x d\eta = \int_0^1 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n r_n \operatorname{th} r_n \lambda F_n(\eta) F_m(\eta) d\eta = 0. \quad (2.4.26)$$

Ограничиваясь конечным числом членов ряда разложения в (2.4.24) и соответствующим количеством «m» в (2.4.26), получаем систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов  $\mathbf{C}_k$  в разложении (2.4.24), а следовательно, и приближенного значения  $B_n$  по формуле (2.4.25) в решении задачи (2.3.53).

Если поперечный край пластинки (например при  $\xi=0$ ) свободен, то граничные условия запишутся:

$$M_{x(\xi=0)} = 0; \quad (2.4.27)$$

$$Q_{x(\xi=0)} = 0. \quad (2.4.28)$$

Используем метод перемещений – закрепим этот край шарнирной опорой и зададим неизвестное перемещение  $W_{(\xi=0)}=hZ_{(\eta)}$ , которое представим в виде разложения по функциям  $F(\eta)$  с неизвестными коэффициентами  $\mathbf{D}_k$ .

$$Z_{(\eta)} = \sum_{k=1,2}^{\infty} \mathbf{D}_k F_k(\eta). \quad (2.4.29)$$

Тогда коэффициенты  $B_n$  в решении (2.3.53) вычисляются по формуле (2.4.21), в которой нужно положить  $X_{(\eta)}=0$ . Неизвестные коэффициенты  $\mathbf{D}_k$  в разложении (2.4.29) могут быть найдены из граничного условия (2.4.28) с использованием метода ортогонализации

$$\int_0^1 F_m(\eta) Q_{x(\xi=0)} d\eta = 0, \quad (2.4.30)$$

аналогично тому, как было показано в предыдущем рассмотренном случае.

Рассмотрим теперь, каким образом можно решать задачу устойчивости пластинки при отсутствии поперечной нагрузки.

### 2.5 Решение задачи устойчивости пластинки методом начальных функций (нахождение критических нагрузок и форм потери устойчивости сжатых пластинок).

Покажем порядок нахождения критических нагрузок и форм потери устойчивости на примере пластинки находящейся под действием равномерно - распределенных сжимающих нагрузок  $N_1$  и  $N_2$ , лежащих в ее срединной плоскости.

Решение однородного уравнения изгиба сжатой пластинки имеет вид (2.3.53), в котором  $W_{(\eta)}^*=0$ :

$$W = h 2Re \sum_{n=1,2..}^{\infty} (A_n sh r_n \xi + B_n ch r_n \xi) F_n(\eta). \quad (2.5.1)$$

Это решение описывает изогнутую форму равновесия пластинки после потери устойчивости под действием сжимающих сил  $N_1$  и  $N_2$ , входящих в характеристическое уравнение (2.3.11), которое получается из удовлетворения граничным условиям на продольных сторонах пластинки.

Для определения произвольных постоянных  $A_n$  и  $B_n$ , входящих в решение (2.5.1), как было показано в предыдущем параграфе, используются однородные граничные условия на поперечных сторонах пластинки. При этом, задача решается точно, если эти края шарнирно оперты или на них задан ползун.

Так, при шарнирном опирании краев  $\xi=0$  и  $\xi=\lambda$  из граничных условий имеем:  
при  $\xi=0$

$$W = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n(\eta) = 0; \quad (2.5.2)$$

$$M_x = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n (r_n^2 F_n(\eta) + \nu F_n''(\eta)) = 0 \quad (2.5.3)$$

уравнения должны удовлетворяться для всех значений  $\eta$ , следовательно,  $B_n=0$ .

При  $\xi=\lambda$ :

$$W = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n(\eta) sh r_n \lambda = 0; \quad (2.5.4)$$

$$M_x = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n (r_n^2 F_n(\eta) + \nu F_n''(\eta)) sh r_n \lambda = 0. \quad (2.5.5)$$

Так как  $A_n$  не равен 0, то граничные условия (2.5.4) и (2.5.5) будут удовлетворены если  $sh r_n \lambda = 0$ , отсюда следует, что для нахождения критических значений  $N_1$  и  $N_2$  необходимо решить характеристическое уравнение относительно неизвестных сил, подставив вместо  $r_n$  корни уравнения  $sh r_n \lambda = 0$ , т.е.  $r_n = \frac{i\pi n}{\lambda}$   $n = 1, 2, 3, \dots$ . Так как, необходимо определить наименьшее значение продольных сил, то естественным будет положить  $n=1$ , однако значение « $n$ » определяет форму потери устойчивости (количество полуволн) в продольном направлении, поэтому минимальную критическую силу для прямоугольных (вытянутых) пластинок необходимо искать для значений  $n=1, 2, 3$  и т.д. в зависимости от соотношения сторон.

Таким образом, решая совместно характеристическое уравнение и  $sh r_n \lambda = 0$ , находим искомое значение критической нагрузки  $N_{кр.}$ .

Если поперечные края пластинки  $\xi=0$  и  $\xi=\lambda$  защемлены или свободны от связей, то граничные условия на этих краях могут быть удовлетворены приближенно с использованием соотношения обобщенной ортогональности, как это было показано при решении задачи для сжато-изогнутой пластинки.

Так, используя метод сил для защемленного края или метод перемещений для свободного края, на основании формулы (2.4.26) в первом случае или (2.4.30) во втором случае, получаем систему однородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $C_k$  или  $D_k$  разложений (2.4.24) или (2.4.29). Ограничиваясь конечным числом членов разложений и приравнявая нулю определитель из коэффициентов этой системы, получаем второе уравнение, необходимое для определения критического параметра сжимающей нагрузки  $N$ . Решая совместно это уравнение с характеристическим, определяющим показатель  $r_n$  однородного решения, находим приближенное значение  $N_{кр.}$ .



Сформулируем основные выводы:

- построена матрица начальных функций для расчета сжато-изогнутых пластинок;

- показан алгоритм получения решения методом начальных функций задачи изгиба сжатых пластинок: отыскание начальных функций из граничных условий на двух продольных сторонах пластинки, учет внешней нагрузки. Это решение точно удовлетворяет дифференциальному уравнению сжато-изогнутой пластинки, принятым условиям на продольных краях и содержит  $4n$  произвольных постоянных, которые могут быть определены из граничных условий на поперечных сторонах пластинки;

- получено новое соотношение обобщенной ортогональности функций однородного решения позволяющего точно или приближенно удовлетворить граничным условиям на поперечных сторонах и найти произвольные постоянные решения задач устойчивости и изгиба сжатых пластинок.

- операторная форма записи решений удобна для учета различных внешних воздействий, в том числе и разрывных;

- часть работ может быть выполнена заранее и представлена в виде таблиц, позволяющих при едином подходе рассчитывать пластины с любыми граничными условиями на любые виды нагрузок.

В следующих главах, на основании этой методики были рассмотрены тестовые примеры решения задачи изгиба и устойчивости сжатой прямоугольной пластинки с различными условиями закрепления её краёв, при разных соотношениях сторон  $\lambda$  и сжимающих сил  $N_1$  и  $N_2$ .

### ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ РАСЧЕТА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СЖАТЫХ И СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ ПЛАСТИНОК С РАЗЛИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ОПИРАНИЯ ПО КОНТУРУ И РАЗЛИЧНЫМИ ЗАГРУЖЕНИЯМИ.

#### 3.1 Примеры расчета на устойчивость сжатой в срединной плоскости пластинки.

Для оценки эффективности предлагаемой методики расчета на устойчивость прямоугольных пластинок с различными условиями опирания и загрузки сначала рассмотрим ряд примеров, для которых имеются числовые результаты, полученные другими методами. Следует отметить, что результаты, при этом, полностью совпадают.

В начале рассмотрены пять примеров (3.1.1-3.1.5) расчета пластинки с различными условиями опирания по контуру, для которых граничные условия точно удовлетворяются с помощью соотношения обобщенной ортогональности, и решение получается точно. На рисунках приняты следующие обозначения:

- - свободный от закрепления край пластины;
- ===== - шарнирное опирание;
- ////////// - жёсткое защемление.

##### 3.1.1 Пластинка, шарнирно опертая по контуру.

В качестве первого примера рассмотрим прямоугольную шарнирно опертую по контуру пластинку (рисунок.3.1.1).

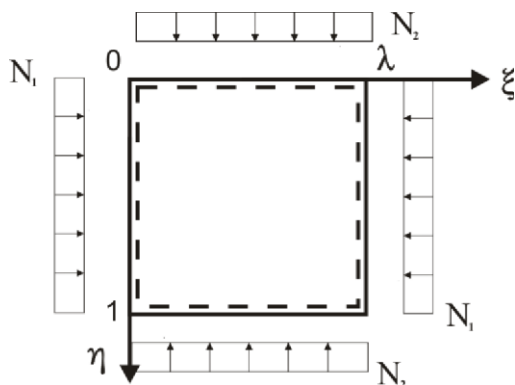


Рисунок 3.1.1 – Расчетная схема.

Расчет производим, следуя алгоритму, рассмотренному во второй главе. Из условия на начальной линии при  $\eta = 0$  известны две начальные функции  $W_0 = M_0 = 0$ .

Раскрывая граничные условия на краю  $\eta = 1$ ,  $W = M_y = 0$ , получим

систему однородных уравнений бесконечно высокого порядка с постоянными

коэффициентами относительно двух неизвестных начальных функций  $\varphi_0$  и  $Q_0$  где индекс 1 вверху операторов означает, что в операторы матрицы вместо переменной  $\eta$  необходимо подставить ее значение, равное единице.:

$$\begin{cases} L_{W\varphi}^1 \cdot \varphi_0 + L_{WQ}^1 \cdot Q_0 = 0; \\ L_{M\varphi}^1 \cdot \varphi_0 + L_{MQ}^1 \cdot Q_0 = 0. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Поскольку в соответствии с таблицей 2.1.1 операторы имеют вид:

$$L_{W\varphi}^1 = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin a}{a} - \\ - (b^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin b}{b} \end{pmatrix}; \quad L_{WQ}^1 = \frac{1}{a^2 - b^2} \left( \frac{\sin a}{a} - \frac{\sin b}{b} \right);$$

$$L_{M\varphi}^1 = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2)^2 \frac{\sin a}{a} - \\ - (b^2 - \nu \alpha^2)^2 \frac{\sin b}{b} \end{pmatrix}; \quad L_{MQ}^1 = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin a}{a} - \\ - (b^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin b}{b} \end{pmatrix},$$

где  $a = \sqrt{N_2 + \alpha^2 + \Delta}$ ;  $b = \sqrt{N_2 + \alpha^2 - \Delta}$ ;  $\Delta = \sqrt{N_2^2 - \alpha^2 (2N_1 - 2N_2)}$ .

Подставив их в (3.1.1), получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin a}{a} - \\ - (b^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin b}{b} \end{pmatrix} \cdot \varphi_0 + \frac{1}{a^2 - b^2} \left( \frac{\sin a}{a} - \frac{\sin b}{b} \right) \cdot Q_0 = 0; \\ \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2)^2 \frac{\sin a}{a} - \\ - (b^2 - \nu \alpha^2)^2 \frac{\sin b}{b} \end{pmatrix} \cdot \varphi_0 + \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin a}{a} - \\ - (b^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin b}{b} \end{pmatrix} \cdot Q_0 = 0. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Для решения однородной системы (3.1.2) введем одну новую неизвестную разрешающую функцию  $V(\xi)$  по формулам:

$$\varphi_0 = -L_{WQ}^1 \cdot V(\xi) = -\frac{1}{a^2 - b^2} \left( \frac{\sin a}{a} - \frac{\sin b}{b} \right) V(\xi); \quad (3.1.3)$$

$$Q_0 = L_{W\varphi}^1 \cdot V(\xi) = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin a}{a} - \\ - (b^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin b}{b} \end{pmatrix} V(\xi).$$

Тогда, после подстановки (3.1.3) в однородную систему (3.1.2), первое уравнение удовлетворится тождественно, а второе примет вид:

$$\begin{aligned}
L(r_n)V(\xi) &= (L_{W\varphi}^1 \cdot L_{MQ}^1 - L_{M\varphi}^1 \cdot L_{WQ}^1)V(\xi) = \\
&= \left[ \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin a}{a} - \\ - (b^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin b}{b} \end{pmatrix} \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin a}{a} - \\ - (b^2 - \nu \alpha^2) \frac{\sin b}{b} \end{pmatrix} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{a^2 - b^2} \left( \frac{\sin a}{a} - \frac{\sin b}{b} \right) \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - \nu \alpha^2)^2 \frac{\sin a}{a} - \\ - (b^2 - \nu \alpha^2)^2 \frac{\sin b}{b} \end{pmatrix} \right] V(\xi) = 0.
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Таким образом, однородная система сводится к одному линейному дифференциальному уравнению бесконечно высокого порядка (трансцендентному), с постоянными коэффициентами, относительно разрешающей функции  $V(\xi)$ , которое можно назвать разрешающим уравнением.

Ищем решение разрешающего уравнения в виде:

$$V(\xi) = C_n e^{r_n \xi}. \tag{3.1.5}$$

Для нахождения неизвестного показателя степени  $r_n$  необходимо решить характеристическое уравнение:

$$(L_{W\varphi}^1 \cdot L_{MQ}^1 - L_{M\varphi}^1 \cdot L_{WQ}^1) = \frac{1}{(a_n^2 - b_n^2)} \left( \frac{\sin a_n}{a_n} \cdot \frac{\sin b_n}{b_n} \right) = 0, \tag{3.1.6}$$

которое получается заменой в дифференциальном операторе уравнения (3.1.4) символа дифференцирования  $\alpha$  на  $r_n$ , где

$$a_n = \sqrt{N_2 + r_n^2 + \Delta_n}; b_n = \sqrt{N_2 + r_n^2 - \Delta_n}; \Delta_n = \sqrt{N_2^2 - r_n^2(2N_1 - 2N_2)}. \tag{3.1.7}$$

Подставив начальные функции (3.1.3) в (2.1.10) и выполнив дифференциальные операции, получим общее решение задачи:

$$\bar{W} = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \xi + B_n ch r_n \xi) F_n(\eta), \tag{3.1.8}$$

$$\text{где } F_n(\eta) = \frac{1}{(a_n^2 - b_n^2)} \left( \frac{\sin b_n}{b_n} \frac{\sin a_n \eta}{a_n} - \frac{\sin a_n}{a_n} \frac{\sin b_n \eta}{b_n} \right).$$

Это решение точно удовлетворяет дифференциальному уравнению, граничным условиям на продольных сторонах пластинки и содержат  $2n$  произвольных постоянных  $A_n$  и  $B_n$  которые определяются из граничных условий на поперечных сторонах пластинки.

Раскрывая граничные условия на поперечном крае при  $\xi=0$ ,  $W = 0$ ;  $M_x = 0$ , получим уравнения, содержащее только функции  $F_n(\eta)$  от аргумента  $\eta$ :

$$W = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n(\eta) = 0; \quad (3.1.9)$$

$$M_x = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n [r_n^2 F_n(\eta) + \nu F_n''(\eta)] = 0.$$

Так как эти уравнения должны удовлетворяться для всех значений  $\eta$  то коэффициенты  $B_n$  должны равняться нулю. Отсюда следует, что  $B_n=0$ .

Из граничного условия при  $\xi=\lambda$ ,  $W = 0$ ;  $M_x = 0$ ,

$$W = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n sh r_n \lambda F_n(\eta) = 0; \quad (3.1.10)$$

$$M_x = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n sh r_n \lambda [r_n^2 \cdot F_n(\eta) + \nu F_n''(\eta)] = 0.$$

Следует, что  $A_n sh r_n \lambda = 0$ . Так как при  $A_n = 0$  нет потери устойчивости ( $W=0$ ), получаем уравнение для нахождения  $r_n$ .

$$sh r_n \lambda = 0. \quad (3.1.11)$$

Отсюда  $r_n = i \frac{n\pi}{\lambda}$ .

Таким образом, прогиб пластины описывается следующим выражением:

$$W = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \sin \frac{n\pi}{\lambda} \xi}{(a_n^2 - b_n^2)} \left( \frac{\sin b_n \sin a_n \eta}{b_n a_n} - \frac{\sin a_n \sin b_n \eta}{a_n b_n} \right), \quad (3.1.12)$$

где

$$a_n = \sqrt{N_2 - \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 + \Delta_n}; \quad b_n = \sqrt{N_2 - \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 - \Delta_n};$$

$$\Delta_n = \sqrt{N_2^2 + \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 (2N_1 - 2N_2)}. \quad (3.1.13)$$

Сомножитель  $\sin \frac{n\pi}{\lambda} \xi$  обеспечивает удовлетворение граничных условий на шарнирно опертых краях пластинки при  $\xi = 0$  и  $\xi = \lambda$ , а параметр «n» определяет форму потери устойчивости (количество полуволн) в продольном направлении.

Выражение  $F_n(\eta) = \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} \left( \frac{\sin b_n \sin a_n \eta}{b_n a_n} - \frac{\sin a_n \sin b_n \eta}{a_n b_n} \right)$  характеризует

распределение прогибов в поперечном направлении. Это решение точно совпадает с решением в тригонометрических рядах.

Определим величину критической силы  $N_1$  и  $N_2$  для чего подставим в характеристическое уравнение (3.1.6) найденное значение  $r_n = i \frac{n\pi}{\lambda}$  и решим трансцендентное уравнение относительно неизвестных сил.

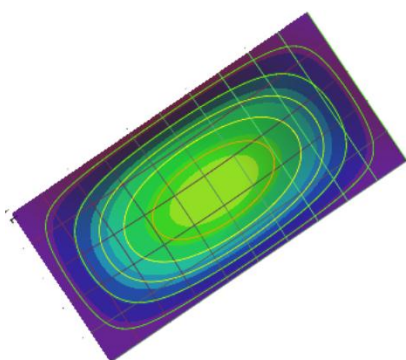
Так как, необходимо определить наименьшее значение продольных сил, то кажется естественным, что «n» должно принимать наименьшее из возможных значений т.е. единицу. Однако значение «n» определяет форму потери устойчивости (количество полуволн) в продольном направлении и как показали вычисления, представленные ниже, минимальную критическую силу для прямоугольных (вытянутых) пластинок необходимо искать для значений  $n=1, 2, 3$  и т.д. в зависимости от соотношения сторон.

В таблице 3.1.1 приведена величина критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda = \frac{l}{h}=0.5; 1.0; 1.5; 2.0$  сжатой в одном направлении силой  $N_1$  ( $N_2=0$ ).

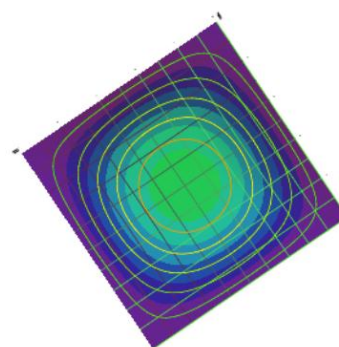
Таблица № 3.1.1 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критической силы $N_1$ .	30.8425	19.7392	21.4184	19.7392

Возможные формы потери устойчивости возникают при наименьшем значении нагрузки. Для полученных значений критической нагрузки ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок.3.1.2).



$\lambda=0.5$



$\lambda=1.0$

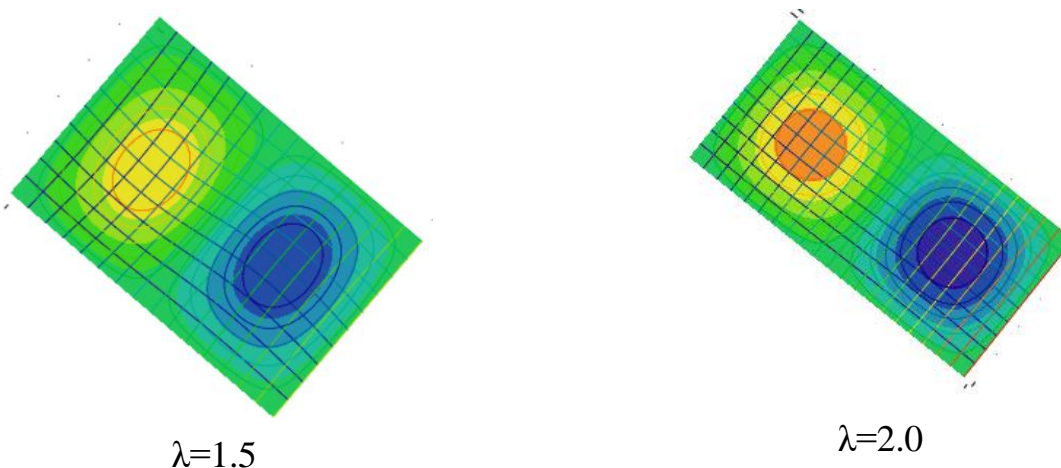


Рисунок 3.1.2 – Формы потери устойчивости.

Из полученных результатов следует, что форма прогибов при потере устойчивости пластинки с соотношением сторон 0.5 и 1.0 образует одну полуволну синусоиды в поперечном и продольном направлении. Изменение числа полуволен синусоиды, в направлении оси  $\xi$ , происходит при соотношении сторон  $\lambda=1.5$  и  $\lambda=2.0$ . Число полуволен синусоиды в направлении оси  $\eta$  остается неизменным и пластина будет терять устойчивость с образованием одной волны.

В таблице 3.1.2 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5; 1.0; 1.5; 2.0$ , сжатой во взаимно перпендикулярных направлениях силами  $N_1=N_2=N$ .

Таблица № 3.1.2 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критических сил $N_1$ и $N_2$ .	24.6740	9.8696	7.1280	6.1685

Нетрудно видеть, что величина критической нагрузки для квадратной пластинки при сжатии в одном направлении в два раза больше, чем при одинаковом сжатии в двух направлениях.

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок.3.1.3).

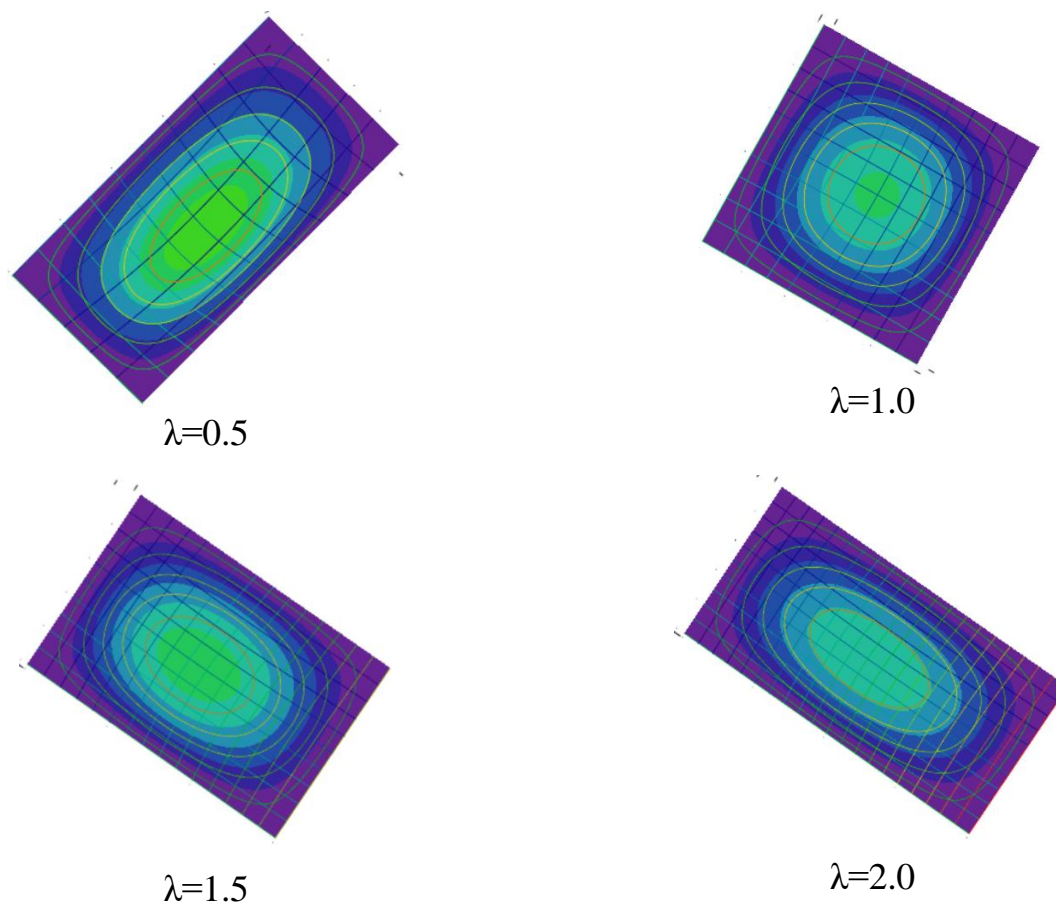
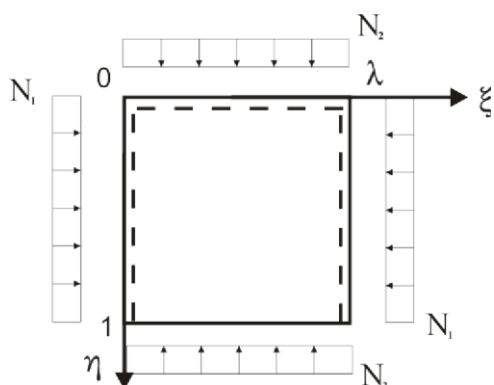


Рисунок 3.1.3 – Формы потери устойчивости.

Форма прогибов при потере устойчивости пластинки при всех соотношениях сторон образует одну полуволну в поперечном и продольном направлении.

### 3.1.2 Пластинка, шарнирно опертая по трем сторонам, одна сторона свободна.

В качестве второго примера рассмотрим пластинку, в которой одна сторона свободна, а три остальные оперты шарнирно (рисунок 3.2.1).



Из условия на начальной линии при  $\eta = 0$  известны две начальные функции  $W_0 = M_0 = 0$ .

Раскрывая граничные условия на краю  $\eta = 1$   $M_y = Q_y = 0$ ,

$$(3.2.1)$$

получим систему двух однородных



Рисунок 3.2.1 – Расчетная схема.

уравнений с постоянными коэффициентами относительно двух неизвестных начальных функций  $\varphi_0$  и  $Q_0$ :

$$\begin{cases} L_{M\varphi}^1 \cdot \varphi_0 + L_{MQ}^1 \cdot Q_0 = 0; \\ L_{Q\varphi}^1 \cdot \varphi_0 + L_{QQ}^1 \cdot Q_0 = 0. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Решение системы уравнений (3.2.2) и дальнейший ход расчета аналогичен порядку расчета в рассмотренном примере 3.1.1.

Характеристическое уравнение для нахождения показателя степени  $r_n$  разрешающей функции  $V(\xi)$  может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} L(r_n) = L_{M\varphi}^1 \cdot L_{QQ}^1 - L_{MQ}^1 \cdot L_{Q\varphi}^1 = \\ \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} \left( C_n^2 \frac{\sin a_n}{a_n} \cos b_n - D_n^2 \frac{\sin b_n}{b_n} \cos a_n \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$\text{где} \quad C_n = a_n^2 - \nu r_n^2; \text{ и } D_n = b_n^2 - \nu r_n^2, \quad (3.2.4)$$

а  $\Delta_n$ ,  $a_n$ ,  $b_n$ , - определяются по формулам (3.1.7).

Подставив начальные функции  $\varphi_0$  и  $Q_0$  в (2.1.10) получим общее решение задачи:

$$\bar{W} = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \xi + B_n ch r_n \xi) F_n(\eta), \quad (3.2.5)$$

$$\text{где} \quad F_n(\eta) = \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} \left( C_n \frac{\sin b_n}{b_n} \frac{\sin a_n \eta}{a_n} - D_n \frac{\sin a_n}{a_n} \frac{\sin b_n \eta}{b_n} \right).$$

Произвольные постоянные  $A_n$  и  $B_n$  определяются из граничных условий на поперечных сторонах пластинки аналогично примеру 3.1.1. Поскольку граничные условия совпадают, то  $B_n=0$  и  $r_n = i \frac{n\pi}{\lambda}$ , а прогиб пластины описывается следующим выражением:

$$W = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{\lambda} \xi \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} \left( C_n \frac{\sin b_n}{b_n} \frac{\sin a_n \eta}{a_n} - D_n \frac{\sin a_n}{a_n} \frac{\sin b_n \eta}{b_n} \right), \quad (3.2.5)$$

где  $a_n$ ;  $b_n$ ;  $\Delta_n$  - определяются согласно (3.1.13).

Для нахождения критических сил  $N_1$  и  $N_2$  необходимо решить

характеристическое уравнение (3.2.3) относительно неизвестных сил, подставив в него последовательно корни  $r_n = i \frac{n\pi}{\lambda}$ , аналогично примеру 3.1.1.

В таблице № 3.2.1 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5; 1.0; 1.5; 2.0$ , сжатой в одном направлении силой  $N_1$  ( $N_2=0$ ).

Таблица № 3.2.1 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критической силы $N_1$ .	21.4948	6.9166	4.2328	3.2971

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.2.2).

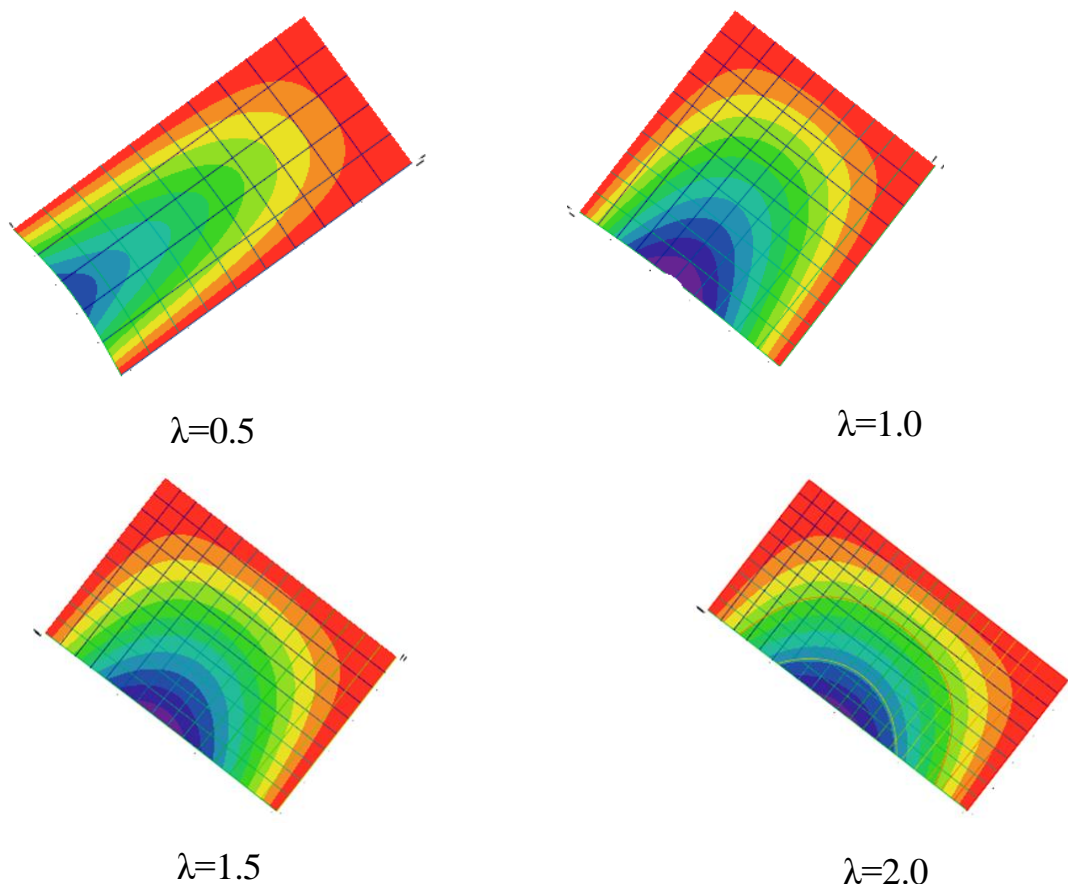


Рисунок 3.2.2 – Формы потери устойчивости.

В таблице № 3.2.2 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5; 1.0; 1.5; 2.0$ , сжатой в одном направлении силой  $N_2$  ( $N_1=0$ ).

Таблица № 3.2.2 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критической силы $N_2$ .	45.5997	11.6748	5.0884	2.5204

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.2.3).

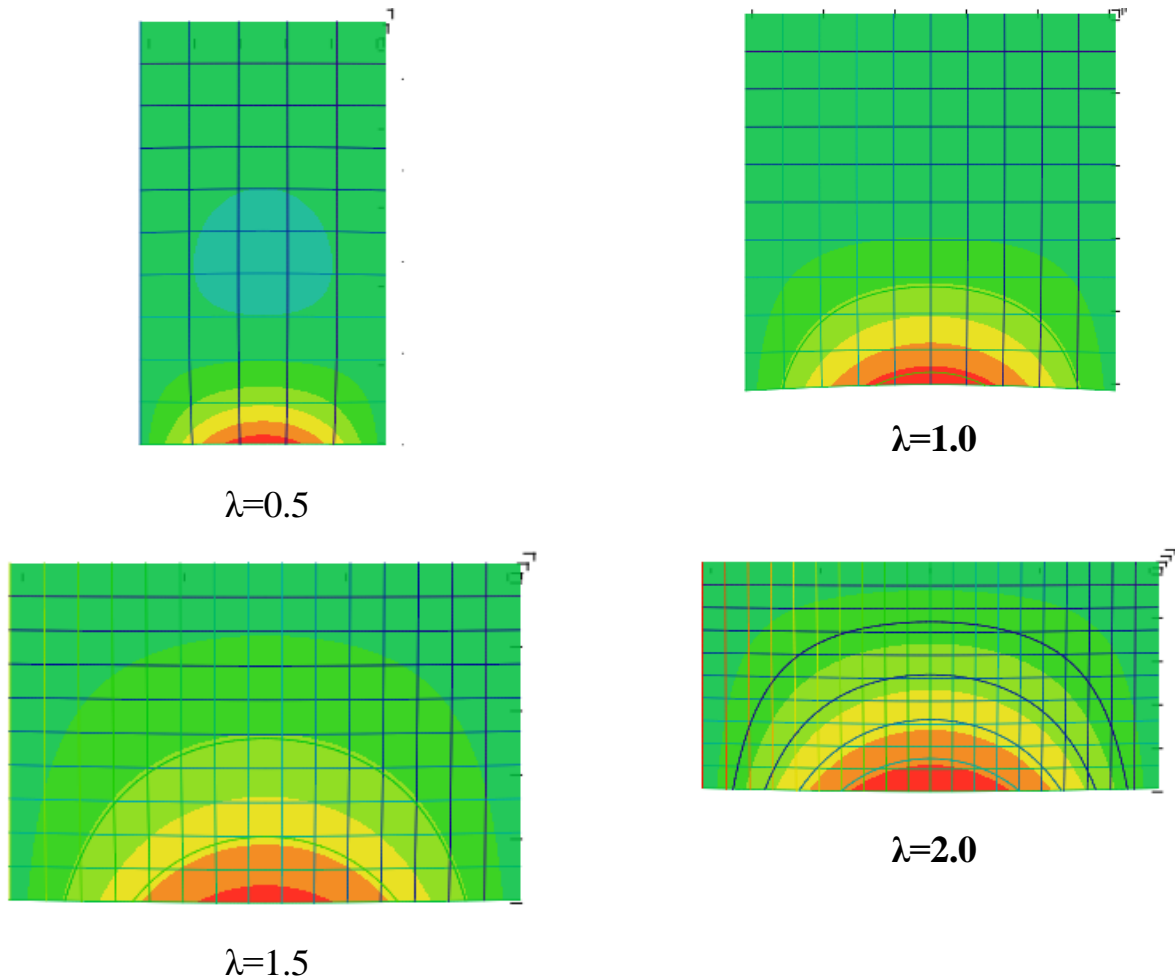


Рисунок 3.2.3 – Формы потери устойчивости.

В таблице № 3.2.3 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5; 1.0; 1.5; 2.0$ , сжатой во взаимно перпендикулярном направлении силами  $N_1=N_2=N$ .

Таблица № 3.2.3 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критических сил $N_1$ и $N_2$ .	19.5909	5.2069	2.4733	1.4679

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.2.4).

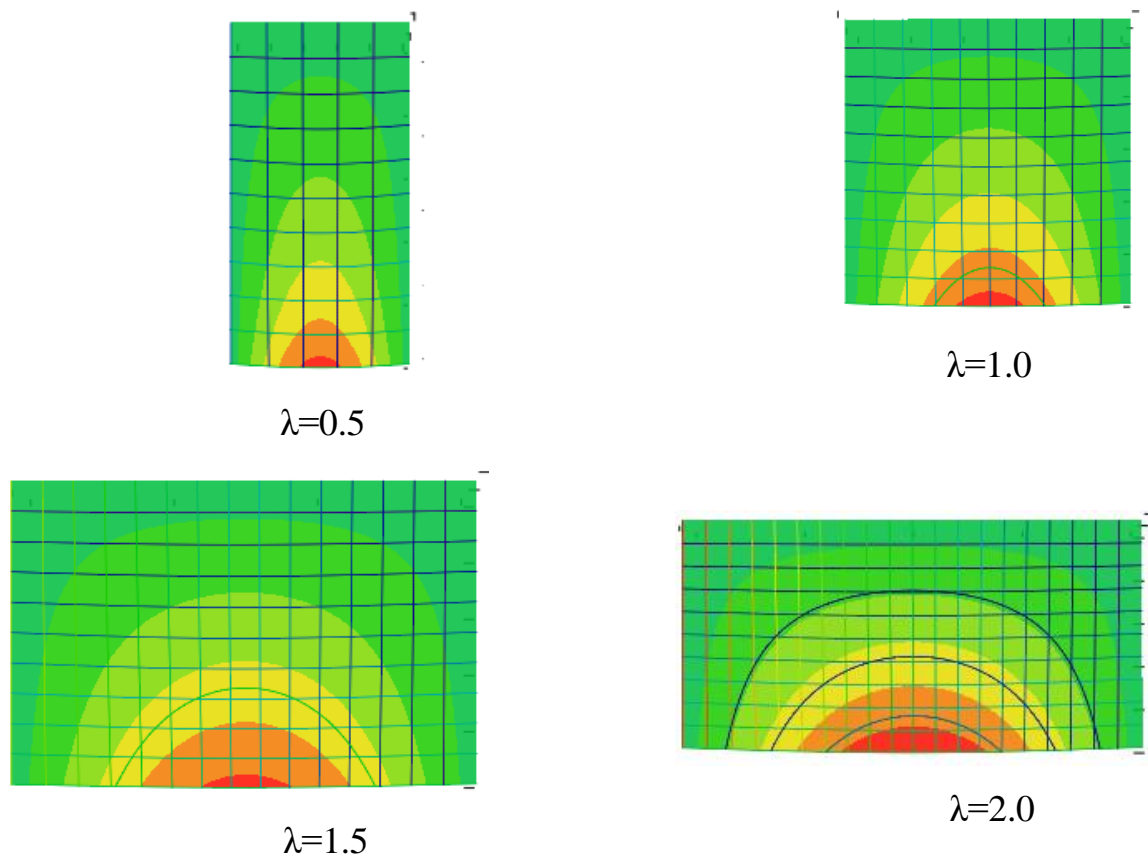


Рисунок 3.2.4 – Формы потери устойчивости.

В продольном направлении пластина всегда теряет устойчивость по одной полуволне синусоиды, как это показано на рисунках. В поперечном направлении форма потери устойчивости соответствует четверти полуволны.

### 3.1.3 Пластинка, шарнирно опертая по двум сторонам, одна сторона свободна и одна сторона жестко защемлена.

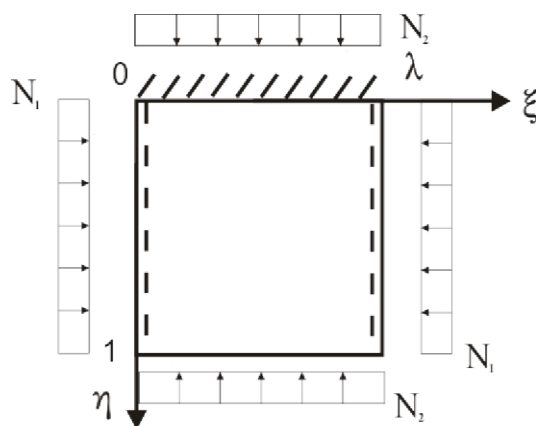


Рисунок 3.3.1 – Расчетная схема.

Из условия на начальной линии (рисунок. 3.3.1) при  $\eta = 0$  известны две начальные функции  $W_0 = \varphi_0 = 0$ .

Раскрывая граничные условия на краю  $\eta = 1$ ;  $M_y = Q_y = 0$ ,

$$(3.3.1)$$

получим систему однородных уравнений бесконечно высокого порядка с

постоянными коэффициентами относительно двух неизвестных начальных функций  $M_0$  и  $Q_0$ :

$$\begin{cases} L_{MM}^1 \cdot M_0 + L_{MQ}^1 \cdot Q_0 = 0; \\ L_{QM}^1 \cdot M_0 + L_{QQ}^1 \cdot Q_0 = 0. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Решая которую, аналогично первому примеру, опуская промежуточные выкладки, получим характеристическое уравнение для нахождения показателя степени  $r_n$  в функции  $V(\xi) = C_n e^{r_n \xi}$ :

$$\begin{aligned} L(r_n) &= L_{MM}^1 \cdot L_{QQ}^1 - L_{QM}^1 \cdot L_{MQ}^1 = \\ &= \frac{1}{(a_n^2 - b_n^2)^2} [(C_n^2 + D_n^2) \cos a_n \cos b_n - 2C_n D_n + \\ &\quad + (C_n^2 b_n^2 + D_n^2 a_n^2) \left( \frac{\sin a_n}{a_n} \frac{\sin b_n}{b_n} \right)] = 0, \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

где  $C_n$  и  $D_n$ , определяются по формулам (3.2.4), а  $a_n$ ,  $b_n$  и  $\Delta_n$  - определяются по формулам (3.1.7), и общее решение задачи, точно удовлетворяющее граничным условиям на продольных сторонах пластинки:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \xi + B_n ch r_n \xi) F_n(\eta), \\ \text{где } F_n(\eta) &= \frac{1}{(a_n^2 - b_n^2)^2} \left[ (\cos b_n \eta - \cos a_n \eta) \left( C_n \frac{\sin a_n}{a_n} - D_n \frac{\sin b_n}{b_n} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\sin a_n \eta}{a_n} - \frac{\sin b_n \eta}{b_n} \right) (C_n \cos a_n - D_n \cos b_n) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Произвольные постоянные  $A_n$  и  $B_n$  определяются из граничных условий на поперечных краях пластинки, поскольку они, такие же, как и в примере (3.1.1),  $r_n$  имеет тоже значение т.е.  $r_n = i \frac{\pi n}{\lambda}$ .

Таким образом, прогиб пластины описывается следующим выражением:

$$W = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin \frac{\pi n}{\lambda} \xi}{(a_n^2 - b_n^2)^2} \left[ (\cos b_n \eta - \cos a_n \eta) \left( C_n \frac{\sin a_n}{a_n} - D_n \frac{\sin b_n}{b_n} \right) + \right. \quad (3.3.5)$$

$$+ \left( \frac{\sin a_n \eta}{a_n} - \frac{\sin b_n \eta}{b_n} \right) (C_n \cos a_n - D_n \cos b_n) \Big],$$

где  $a_n$ ;  $b_n$ ;  $\Delta_n$  - определяются согласно (3.1.13), а  $C_n$  и  $D_n$ , по (3.2.4).

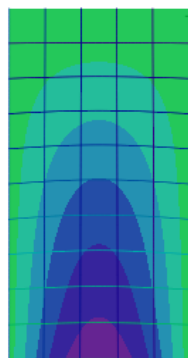
Для нахождения критических сил  $N_1$  и  $N_2$  необходимо решить характеристическое уравнение (3.3.3) относительно неизвестных сил, подставив в него последовательно корни  $r_n = i \frac{n\pi}{\lambda}$ , аналогично примерам 3.1.1 и 3.1.2.

В таблице № 3.3.1 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5$ ; 1.0; 1.5; 2.0, сжатой в одном направлении силой  $N_1$  ( $N_2=0$ ).

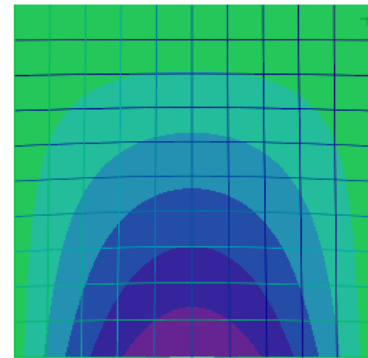
Таблица № 3.3. 1 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критической силы $N_1$ .	22.2964	8.3805	6.6084	6.8406

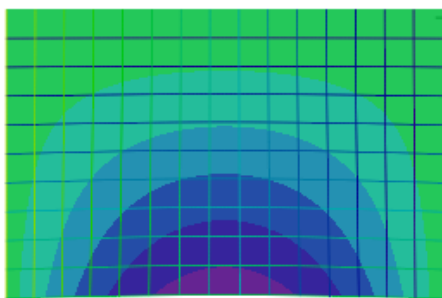
Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.3.2).



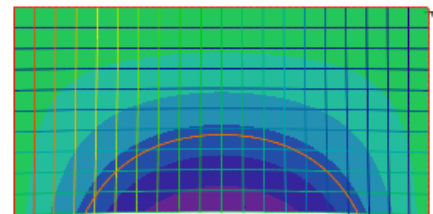
$\lambda=0.5$



$\lambda=1.0$



$\lambda=1.5$



$\lambda=2.0$

Рисунок 3.3.2 – Формы потери устойчивости.

В таблице № 3.3.2 приведены значения критической нагрузки для

прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5; 1.0; 1.5; 2.0$ , сжатой в одном направлении силой  $N_2 (N_1 = 0)$ .

Таблица № 3.3.2 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критической силы $N_2$ .	48.1267	12.5168	5.6227	3.4100

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.3.3).

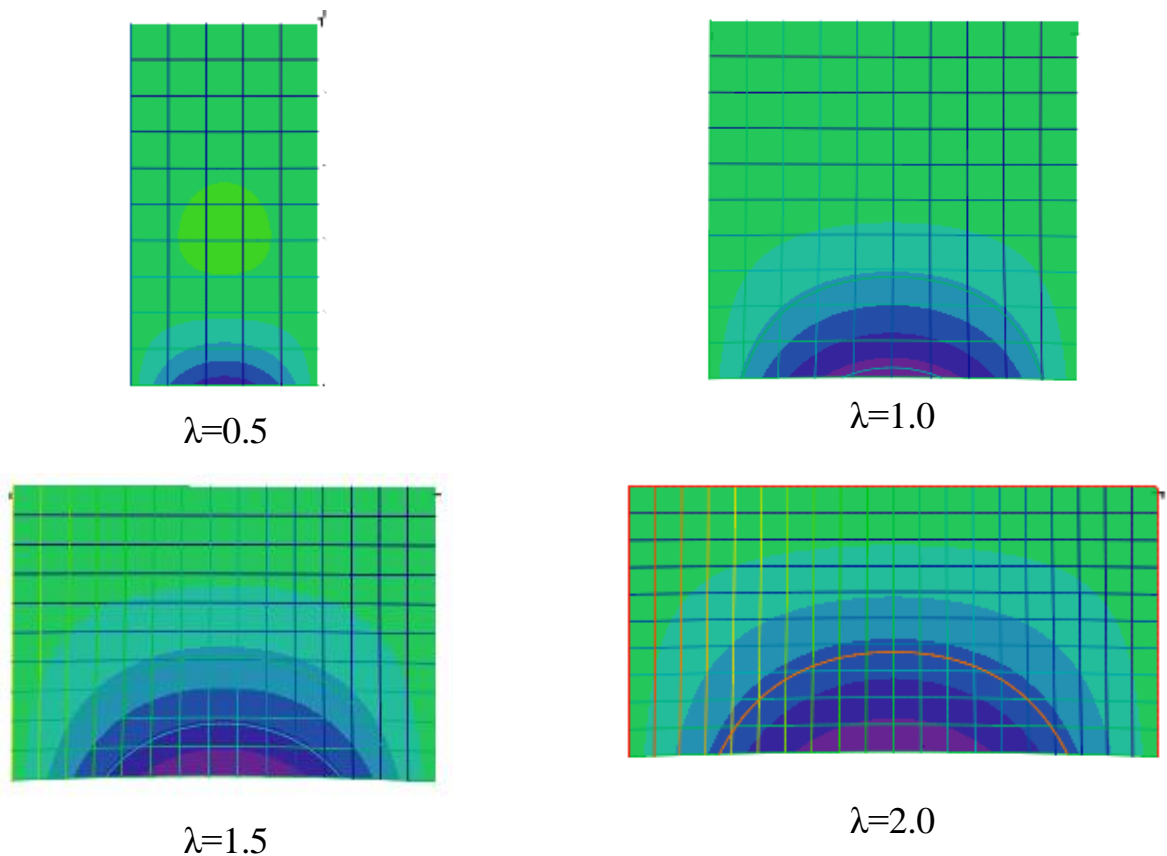


Рисунок 3.3.3 – Формы потери устойчивости.

В таблице № 3.3.3 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5; 1.0; 1.5; 2.0$ , сжатой во взаимно перпендикулярном направлении силами  $N_1=N_2=N$ .

Таблица № 3.3.3 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критических сил $N_1$ и $N_2$ .	20.2916	5.8978	3.2789	2.3749

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы

потери устойчивости (рисунок 3.3.4).

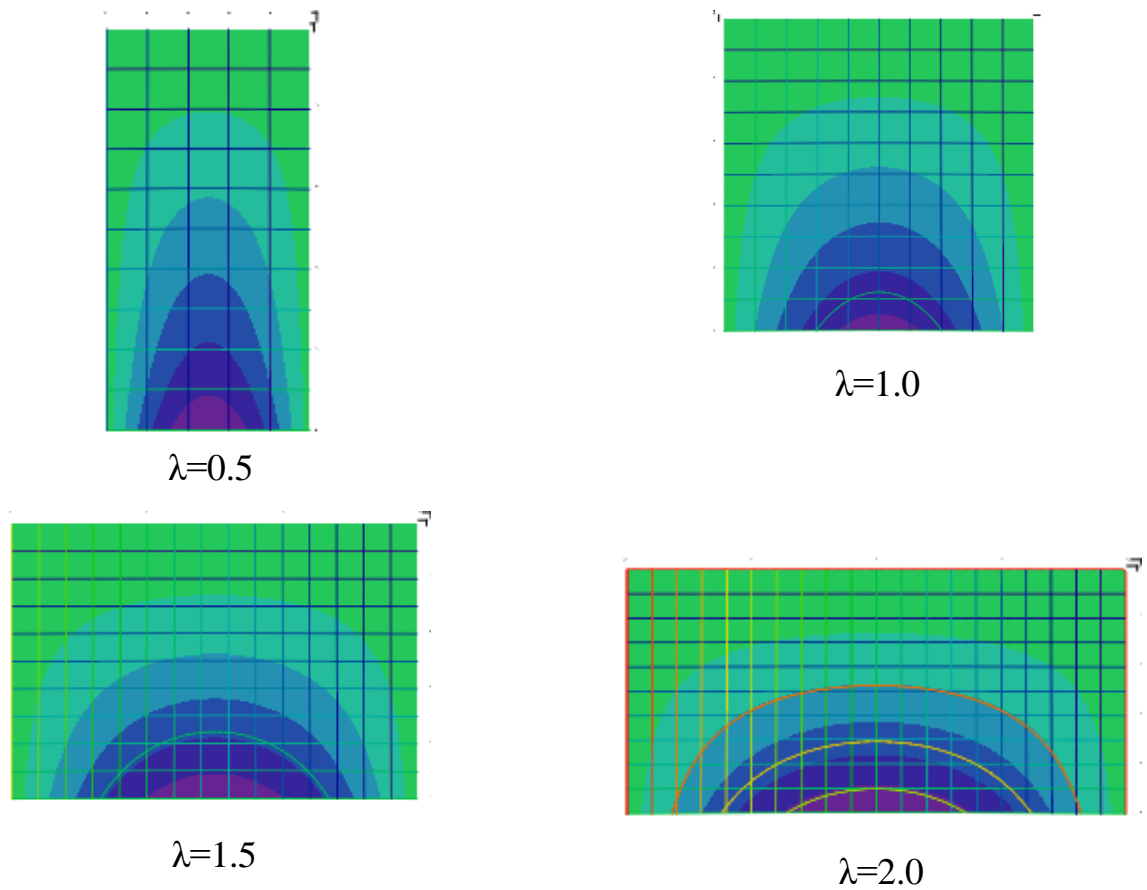


Рисунок 3.3.4 – Формы потери устойчивости.

### 3.1.4 Пластинка, шарнирно опертая по двум сторонам и по двум жестко закреплена.

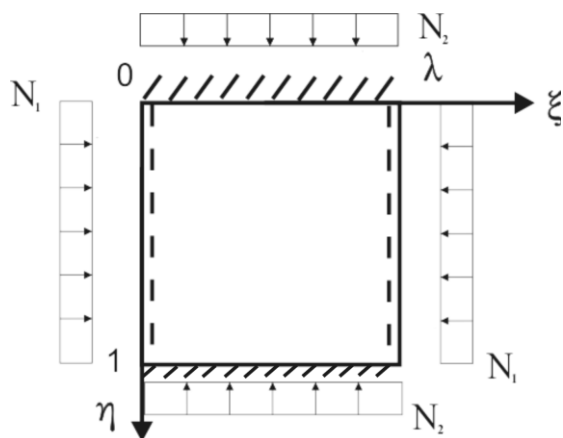


Рисунок 3.4.1 – Расчетная схема.

Рассмотрим пластинку, у которой, две продольные стороны жестко заделаны, а две другие опираются шарнирно.

Из условия на начальной линии при  $\eta = 0$  известны две начальные функции  $W_0 = \varphi_0 = 0$ .

Раскрывая граничные условия на краю

$$\eta = 1 \quad W = \varphi_y = 0. \quad (3.4.1)$$

Получим систему однородных уравнений бесконечно высокого порядка с постоянными коэффициентами относительно двух неизвестных начальных функций  $M_0$  и  $Q_0$ :



$$\begin{cases} L_{WM}^1 \cdot M_0 + L_{WQ}^1 \cdot Q_0 = 0; \\ L_{\varphi M}^1 \cdot M_0 + L_{\varphi Q}^1 \cdot Q_0 = 0. \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Решая систему (3.4.2), аналогично тому, как это делалось в предыдущих примерах, получим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} L(r_n) &= L_{WM}^1 \cdot L_{\varphi Q}^1 - L_{\varphi M}^1 \cdot L_{WQ}^1 = \\ &= \frac{1}{(a_n^2 - b_n^2)^2} \left( 2 - 2 \cos a_n \cos b_n - \left( \frac{b_n}{a_n} + \frac{a_n}{b_n} \right) (\sin a_n \sin b_n) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

где  $a_n, b_n$ , - определяются по формулам (3.1.7), а общее решение задачи:

$$\bar{W} = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \xi + B_n ch r_n \xi) F_n(\eta), \quad (3.4.4)$$

где  $F_n(\eta) = \frac{1}{(a_n^2 - b_n^2)^2} \left[ (\cos b_n \eta - \cos a_n \eta) \left( \frac{\sin a_n}{a_n} - \frac{\sin b_n}{b_n} \right) + (\cos a_n - \cos b_n) \left( \frac{\sin a_n \eta}{a_n} - \frac{\sin b_n \eta}{b_n} \right) \right].$

Произвольные постоянные  $A_n$  и  $B_n$  определяются из граничных условий на поперечных сторонах пластинки аналогично примеру 3.1.1. Поскольку граничные условия совпадают, то  $B_n=0$  и  $r_n = i \frac{n\pi}{\lambda}$ , а прогиб пластины описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} W &= 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin \frac{\pi n}{\lambda} \xi}{(a_n^2 - b_n^2)^2} \left[ (\cos b_n \eta - \cos a_n \eta) \left( \frac{\sin a_n}{a_n} - \frac{\sin b_n}{b_n} \right) + (\cos a_n - \cos b_n) \left( \frac{\sin a_n \eta}{a_n} - \frac{\sin b_n \eta}{b_n} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Для нахождения критических сил  $N_1$  и  $N_2$  необходимо решить характеристическое уравнение (3.4.3) относительно неизвестных сил подставив в него последовательно корни  $r_n = i \frac{n\pi}{\lambda}$ , аналогично примерам 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3.

В таблице № 3.4.1 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5; 1.0; 1.5;$

2.0, сжатой в одном направлении силой  $N_1$  ( $N_2=0$ ).

Таблица № 3.4.1 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критической силы $N_1$ .	37.9549	37.95496	35.11571	34.40348

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.4.2).

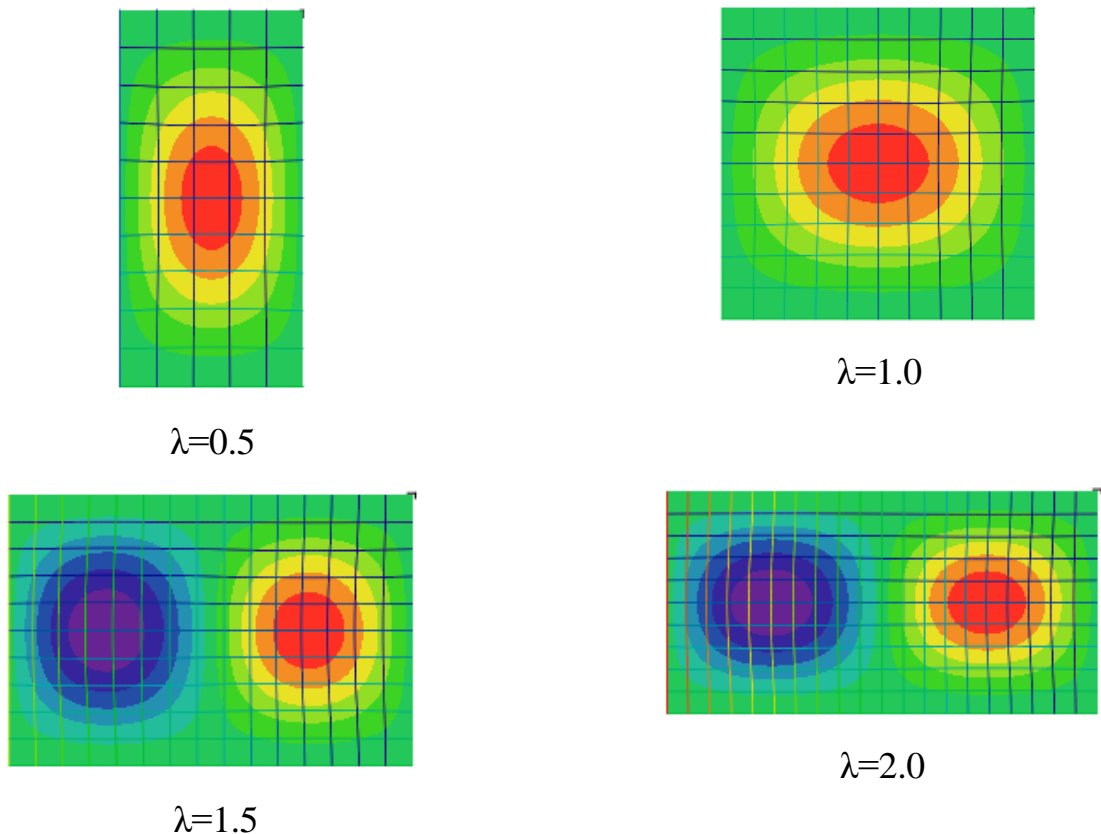


Рисунок 3.4.2 – Формы потери устойчивости.

В таблице № 3.4.2 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5$ ; 1.0; 1.5; 2.0, сжатой в одном направлении силой  $N_2$  ( $N_1 = 0$ ).

Таблица № 3.4.2 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критической силы $N_2$ .	95.6789	33.2763	24.8555	22.4378

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.4.3).

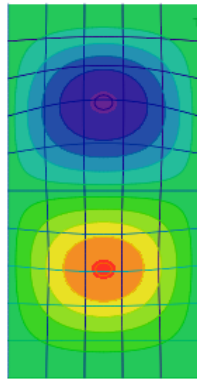
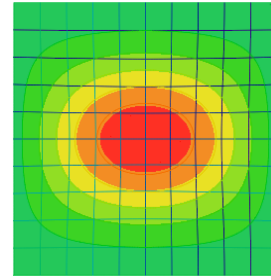
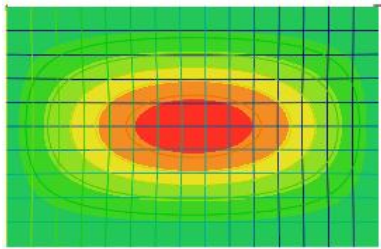
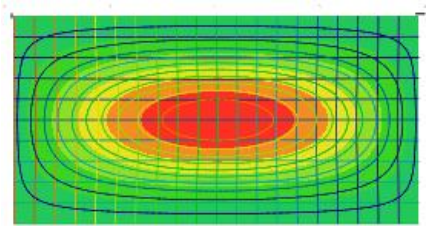
 $\lambda=0.5$  $\lambda=1.0$  $\lambda=1.5$  $\lambda=2.0$ 

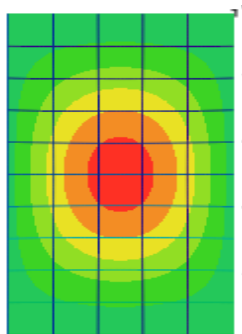
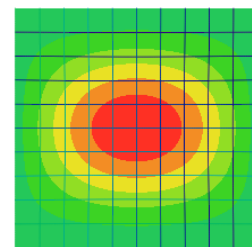
Рисунок 3.4.3 – Формы потери устойчивости.

В таблице № 3.4.3 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5; 1.0; 1.5; 2.0$ , сжатой во взаимно перпендикулярном направлении силами  $N_1=N_2=N$ .

Таблица № 3.4.3 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критических сил $N_1$ и $N_2$ .	29.2348	18.8998	18.5922	18.8748

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.4.4).

 $\lambda=0.5$  $\lambda=1.0$

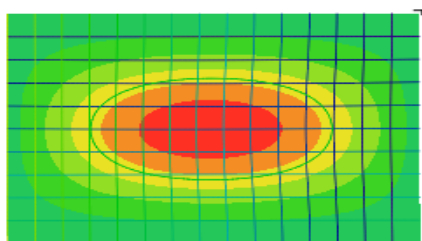
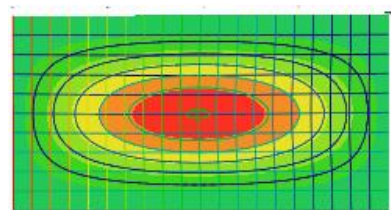
 $\lambda=1.5$  $\lambda=2.0$ 

Рисунок 3.4.4 – Формы потери устойчивости.

Форма потери устойчивости от критического сжимающего усилия реализуется с образованием одной полуволны в каждом направлении.

### 3.1.5 Пластинка, шарнирно опертая по двум сторонам и две стороны свободны.

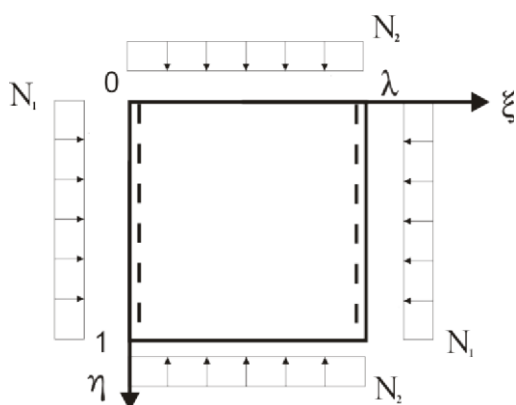


Рисунок 3.5.1 – Расчетная схема.

Рассмотрим пластинку, у которой, две продольные стороны свободны от опор, а две другие свободно опираются (рисунок 3.5.1).

Из условия на начальной линии при  $\eta = 0$  известны две начальные функции  $M_0 = Q_0 = 0$ .

Раскрывая граничные условия на краю

$$\eta = 1; \quad M_y = Q_y = 0. \quad (3.5.1)$$

получим систему однородных уравнений бесконечно высокого порядка с постоянными коэффициентами относительно двух неизвестных начальных функций  $W_0$  и  $\varphi_0$ :

$$\begin{cases} L_{MW}^1 \cdot W_0 + L_{M\varphi}^1 \cdot \varphi_0 = 0; \\ L_{QW}^1 \cdot W_0 + L_{Q\varphi}^1 \cdot \varphi_0 = 0. \end{cases} \quad (3.5.2)$$

Решая систему, аналогично тому, как это делалось в предыдущих примерах, получаем характеристическое уравнение:  $L(r_n) = 0$

$$\frac{1}{(a_n^2 - b_n^2)^2} \left( C_n^2 D_n^2 (2 - 2 \cos a_n \cos b_n) - (C_n^4 b_n^2 + C_n^4 a_n^2) \frac{\sin a_n \sin b_n}{a_n b_n} \right) = 0, \quad (3.5.3)$$

где  $C_n$  и  $D_n$ , определяются по формулам (3.2.4), а  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $\Delta_n$  - определяются по формулам (3.1.7).

Общее решение задачи в этом случае имеет вид:

$$\bar{W} = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \xi + B_n ch r_n \xi) F_n(\eta), \quad (3.5.4)$$

$$\text{где } F_n(\eta) = \frac{1}{(a_n^2 - b_n^2)^2} \left[ (\cos b_n \eta - \cos a_n \eta) \left( C_n \frac{\sin a_n}{a_n} - D_n \frac{\sin b_n}{b_n} \right) + \right. \\ \left. + (C_n \cos a_n \eta - D_n \cos b_n \eta) \left( \frac{\sin a_n \eta}{a_n} - \frac{\sin b_n \eta}{b_n} \right) \right].$$

Произвольные постоянные  $A_n$  и  $B_n$  определяются из граничных условий на поперечных сторонах пластинки аналогично примеру 3.1.1. Поскольку граничные условия совпадают, то  $B_n=0$  и  $r_n = i \frac{n\pi}{\lambda}$ , а прогиб пластины описывается следующим выражением:

$$W = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin \frac{n\pi}{\lambda} \xi}{(a_n^2 - b_n^2)^2} \left[ (\cos b_n \eta - \cos a_n \eta) \left( C_n \frac{\sin a_n}{a_n} - D_n \frac{\sin b_n}{b_n} \right) \right]. \quad (3.5.7)$$

Для нахождения критических сил  $N_1$  и  $N_2$  необходимо решить характеристическое уравнение (3.2.6) относительно неизвестных сил подставив в него последовательно корни  $r_n = i \frac{n\pi}{\lambda}$ , аналогично примерам 3.1.1, 3.1.2, 3.1.4.

В таблице № 3.5.1 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5; 1.0; 1.5; 2.0$ , сжатой в одном направлении силой  $N_1$  ( $N_2=0$ ).

Таблица № 3.5.1 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критической силы $N_1$ .	19.2093	4.6994	2.0570	4.6994

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.5.2).

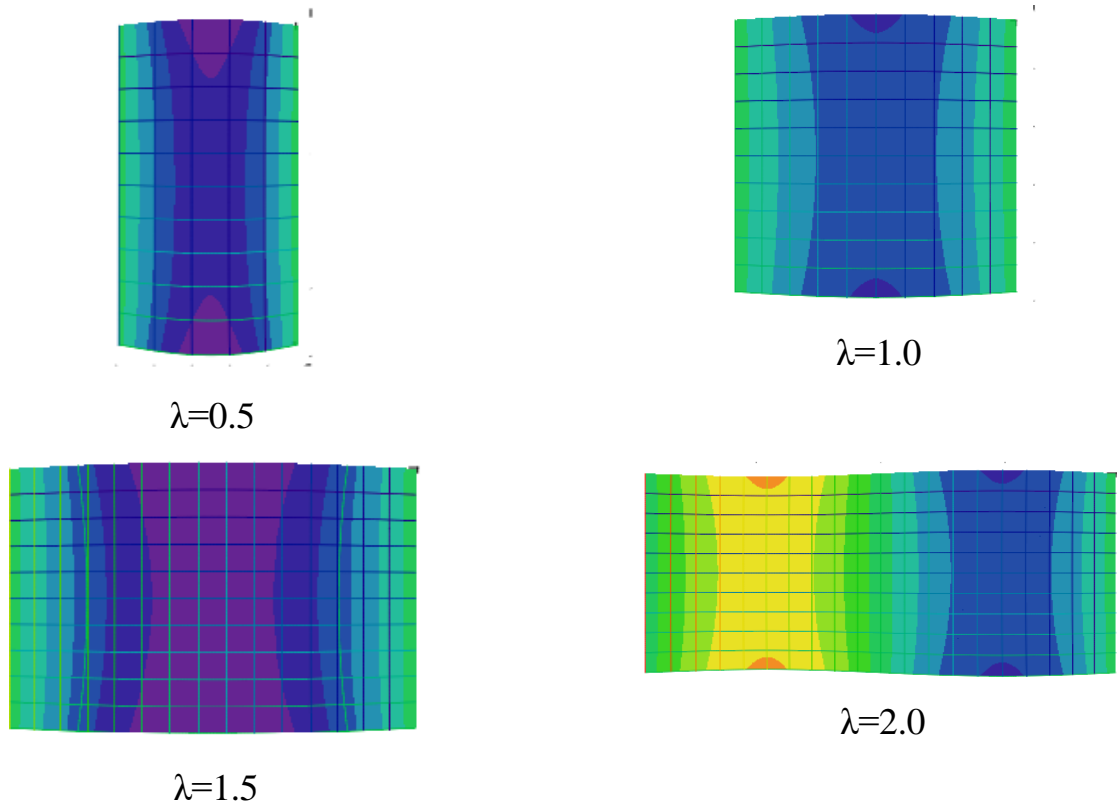


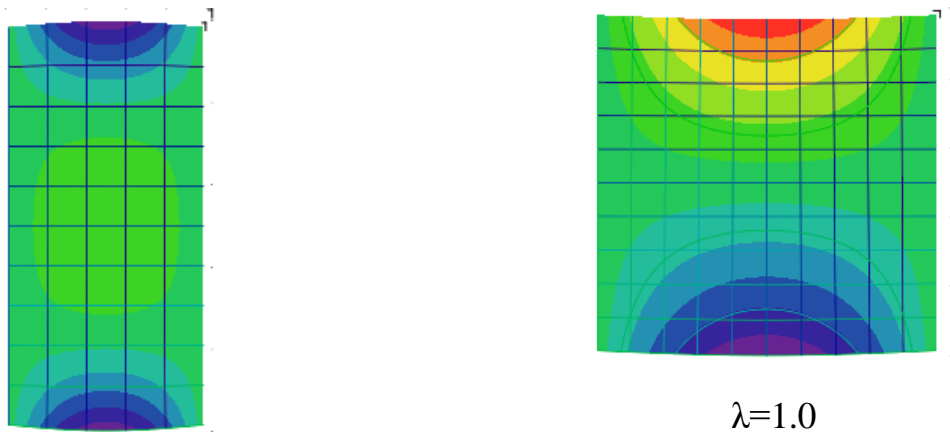
Рисунок 3.5.2 – Формы потери устойчивости.

В таблице № 3.5.2 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5$ ; 1.0; 1.5; 2.0, сжатой в одном направлении силой  $N_2$  ( $N_1 = 0$ ).

Таблица № 3.5.2 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критической силы $N_2$ .	44.6242	10.0815	3.7624	1.9518

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.5.3).



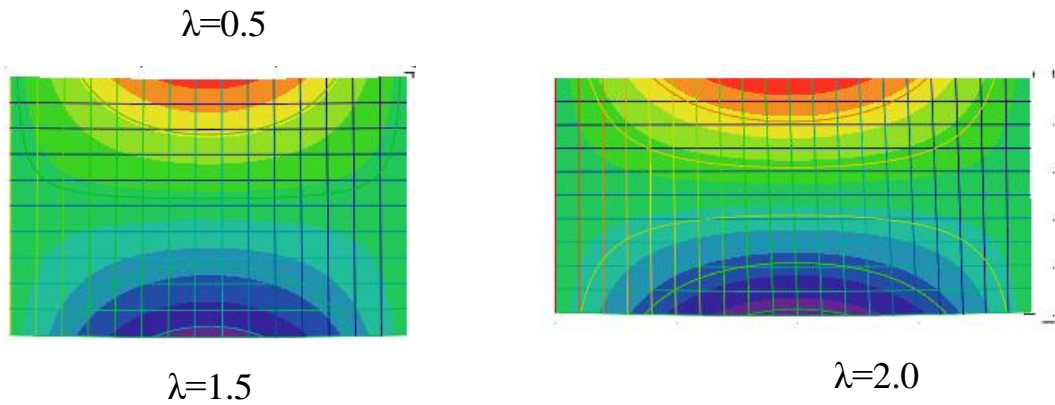


Рисунок 3.5.3 – Формы потери устойчивости.

В таблице № 3.5.3 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5$ ; 1.0; 1.5; 2.0, сжатой во взаимно перпендикулярном направлении силами  $N_1=N_2=N$ .

Таблица № 3.5.3 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критических сил $N_1$ и $N_2$ .	18.8013	4.6994	2.0233	1.1323

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.5.4).

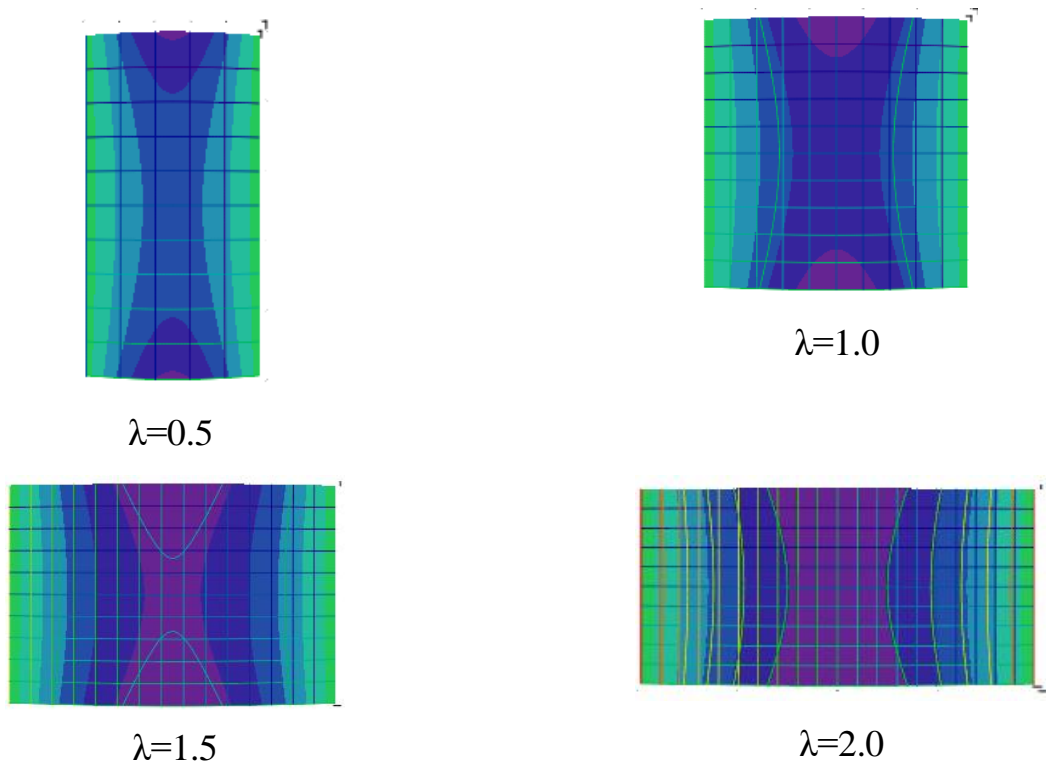


Рисунок 3.5.4 – Формы потери устойчивости.

Как следует из полученных результатов, кривизна в направлении оси  $\eta$  имеет знак, противоположный знаку кривизны в направлении оси  $\xi$ , что следует из того факта, что прогиб  $W$  является тригонометрической функцией от  $\eta$ , но гиперболической - от  $\xi$ . Таким образом, если при потере устойчивости пластины ее кривизна по оси  $\eta$  направлена вверх, то по оси  $\xi$  ее кривизна направлена вниз, как это показано изолиниями на рисунках. Такой тип искривления поверхности называется антиклассическим или седлообразным.

### 3.1.6 Пластинка жестко закреплена по трем сторонам и одна сторона свободна.

Теперь рассмотрим задачу устойчивости сжатой пластинки, три стороны которой жестко зафиксированы, а одна свободна (рисунок 3.6.1). Граничные условия на поперечных сторонах такой пластинки не могут быть удовлетворены точно.

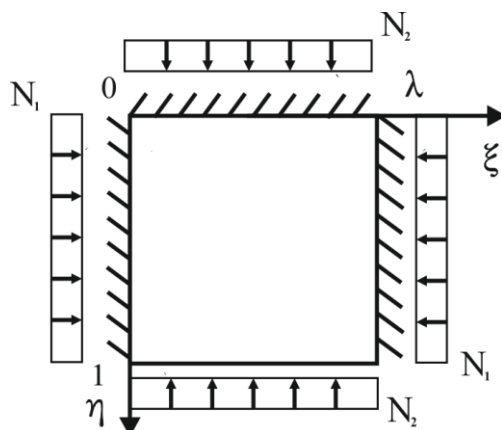


Рисунок 3.6.1 – Расчетная схема.

Поскольку нагрузка и граничные условия на продольных сторонах пластинки совпадают с условиями рассмотренными в примере 3.1.3, решение задачи, удовлетворяющее этим граничным условиям на продольных сторонах пластинки, определяется выражением

(3.3.4):

$$W = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \xi + B_n ch r_n \xi) F(\eta), \quad (3.6.1)$$

$$\text{где } F_n(\eta) = \frac{1}{(a_n^2 - b_n^2)^2} \left[ (\cos b_n \eta - \cos a_n \eta) \left( C_n \frac{\sin a_n}{a_n} - D_n \frac{\sin b_n}{b_n} \right) + \left( \frac{\sin a_n \eta}{a_n} - \frac{\sin b_n \eta}{b_n} \right) (C_n \cos a_n - D_n \cos b_n) \right],$$

а характеристическое уравнение для определения показателя степени  $r_n$  формулой (3.3.3):



$$\frac{1}{(a_n^2 - b_n^2)^2} \left[ (C_n^2 + D_n^2) \cos a_n \cos b_n - 2C_n D_n + (C_n^2 b_n^2 + D_n^2 a_n^2) \left( \frac{\sin a_n}{a_n} \frac{\sin b_n}{b_n} \right) \right] = 0, \quad (3.6.2)$$

где  $C_n = a_n^2 - \nu r_n^2$  и  $D_n = b_n^2 - \nu r_n^2$ , а  $a_n, b_n, \Delta_n$  - определяются по формулам (3.1.7).

Как было показано в § 2.4.2 коэффициенты могут быть найдены точно, если в этих сечениях заданы значения  $W$  и  $M_x$  или  $\varphi_x$  и  $Q_x$ . При заданных граничных условиях (3.6.3) коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  могут быть найдены приближенно используя метод сил из граничных условий на поперечных сторонах пластинки при  $\xi = 0, \xi = \lambda$ :

$$W = 0; \quad \varphi_x = 0. \quad (3.6.3)$$

Выберем основную систему метода сил, для чего на поперечных краях

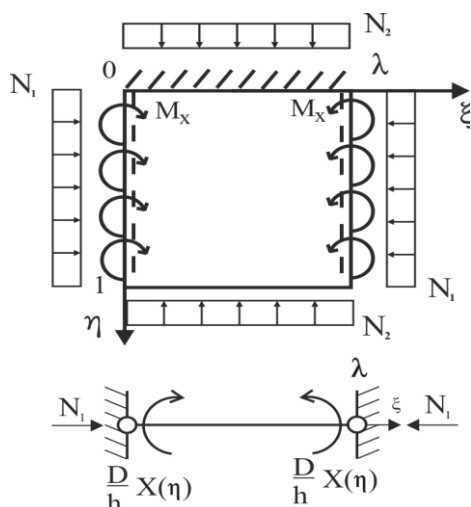


Рисунок 3.6.2 - Основная система.

пластинки врежем шарнир и приложим пока неизвестный распределенный момент  $M_x = \frac{D}{h} X(\eta)$ , соответствующий симметричной форме потери устойчивости (рисунок 3.6.2), где  $X(\eta)$  представим в виде бесконечного тригонометрического ряда с неизвестными коэффициентами

$$X(\eta) = \sum_{m=1,2,3}^{\infty} E_m \sin \frac{2m-1}{2} \pi \eta.$$

Граничные условия на краях при  $\xi = 0, \xi = \lambda$  для основной системы метода сил:

$$W = 0; \quad M_x = \frac{D}{h} X(\eta). \quad (3.6.4)$$

Чтобы основная система была эквивалентна заданной, полученное решение (3.6.1) должно удовлетворять следующим граничным условиям на поперечных краях пластинки:

1) при  $\xi=0$ :

$$\begin{aligned} W &= 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n(\eta) = 0; \\ \varphi_x &= 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n r_n F_n(\eta) = 0; \\ M_x &= 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n (r_n^2 F_n(\eta) + \nu F_n''(\eta)) = -X_{(\eta)} \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

2) при  $\xi = \lambda$ :

$$\begin{aligned} W &= 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \lambda + B_n ch r_n \lambda) F_n(\eta) = 0; \\ \varphi_x &= 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n ch r_n \lambda + B_n sh r_n \lambda) r_n F_n(\eta) = 0; \\ M_x &= 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \lambda + B_n ch r_n \lambda) (r_n^2 F_n(\eta) + \nu F_n''(\eta)) = -X_{(\eta)}. \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

В характеристическое уравнение (3.6.2) входят неизвестные значения критических сил  $N_1$  и  $N_2$  и бесконечное множество комплексных корней  $r_n$ . Поэтому необходимо получить дополнительные уравнения, которые, решая совместно с характеристическим, позволят определить значения критических сил  $N_1$  и  $N_2$  и построить изогнутую форму равновесия пластинки.

Нетрудно заметить, что первые граничные условия на краях  $\xi=0$ ,  $\xi=\lambda$  (3.6.3) в основной системе и в заданной пластинке (3.6.4) тождественны, следовательно выполняются точно. Отсюда следует, что второе уравнение для определения критических сил можно получить из удовлетворения второго граничного условия т.е. из условия равенства нулю угла поворота ( $\varphi_x = 0$ ).

Таким образом:

для стороны  $\xi=0$ :

$$\varphi_x = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n r_n F_n(\eta) = 0 \quad \Rightarrow A_n = 0. \quad (3.6.7)$$

Для стороны  $\xi=\lambda$ :

$$\varphi_x = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n r_n sh r_n \lambda F_n(\eta) = 0. \quad (3.6.8)$$

Используя, свойство обобщенной ортогональности (2.4.7), полученное в главе 2, для сжатых пластин, получим формулу для определения неизвестных коэффициентов  $B_n$ :

$$B_n = \frac{-r_n^2}{J_n} \int_0^1 f_2(\eta) F_n(\eta) d\eta, \quad (3.6.9)$$

где 
$$J_n = \int_0^1 \left( F_n'^2(\eta) - 2N_2 F_n'^2(\eta) - r_n^4 F_n^2(\eta) \right) d\eta;$$

$$f_2(\eta) = -X(\eta) = - \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} E_m \sin \frac{2m-1}{2} \pi \eta. \quad (3.6.10)$$

Введя следующее обозначение:

$$\Psi_{n,m} = \int_0^1 \sin \frac{2m-1}{2} \pi \eta F_n(\eta) d\eta, \quad (3.6.11)$$

И подставив (3.6.9) и (3.6.11) в (3.6.8) получим:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= 2Re \sum_{n=1,2}^{\infty} B_n r_n F_n(\eta) sh r_n \lambda = \\ &= 2Re \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{r_n^3 F_n(\eta) sh r_n \lambda}{J_n} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} A_m \Psi_{n,m} = 0. \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

Воспользуемся свойством ортогональности тригонометрических функций, и умножим выражение для нахождения угла поворота  $\varphi_x$  (3.6.12) на  $\sin \frac{2k-1}{2} \pi \eta$  и проинтегрируем по  $\eta$  в интервале от 0 до 1.

$$\varphi_x = 2Re \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} r_n^3 \frac{sh r_n \lambda}{J_n} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} E_m \Psi_{n,m} \int_0^1 \sin \frac{2k-1}{2} \pi \eta F_n(\eta) d\eta = 0, \quad (3.6.13)$$

или 
$$\varphi_x = 2Re \sum_{n=1,2..}^{\infty} \frac{r_n^3 sh r_n \lambda}{J_n} \sum_{m=1,2...}^{\infty} E_m \Psi_{n,m} \sum_{k=1,2...}^{\infty} \Psi_{n,k} = 0. \quad (3.6.14)$$

Проведя некоторые перестановки, получим:

$$\sum_{m=1,2..}^{\infty} E_m \left( \sum_{n=1,2..}^{\infty} \frac{r_n^3}{J_n} sh r_n \lambda \Psi_{n,m} \Psi_{n,k} \right) = 0. \quad (3.6.15)$$

Ограничившись конечным числом членов ряда разложения (3.6.15) по  $n, m, k$ , получим систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $E_m$ .

Например, для  $n=m=k=2$  выражение (3.6.15) примет вид:

$$\begin{cases} E_1 \left[ \frac{r_1^3}{J_1} sh r_1 \lambda \Psi_{1,1} \Psi_{1,1} + \frac{r_2^3}{J_2} sh r_2 \lambda \Psi_{2,1} \Psi_{2,1} \right] + E_2 \left[ \frac{r_1^3}{J_1} sh r_1 \lambda \Psi_{1,1} \Psi_{1,1} + \frac{r_2^3}{J_2} sh r_2 \lambda \Psi_{2,1} \Psi_{2,1} \right] = 0 \\ E_1 \left[ \frac{r_1^3}{J_1} sh r_1 \lambda \Psi_{1,1} \Psi_{1,2} + \frac{r_2^3}{J_2} sh r_2 \lambda \Psi_{2,1} \Psi_{2,2} \right] + E_2 \left[ \frac{r_1^3}{J_1} sh r_1 \lambda \Psi_{1,1} \Psi_{1,2} + \frac{r_2^3}{J_2} sh r_2 \lambda \Psi_{2,1} \Psi_{2,2} \right] = 0. \end{cases} \quad (3.6.16)$$

Поскольку неизвестные коэффициенты не могут быть равны нулю ( $E_m \neq 0$ ), то должен быть равен нулю определитель системы (3.6.15):

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{r_1^3}{J_1} sh r_1 \lambda \Psi_{1,1} \Psi_{1,1} + \frac{r_2^3}{J_2} sh r_2 \lambda \Psi_{2,1} \Psi_{2,1} \right] \cdot \left[ \frac{r_1^3}{J_1} sh r_1 \lambda \Psi_{1,1} \Psi_{1,2} + \frac{r_2^3}{J_2} sh r_2 \lambda \Psi_{2,1} \Psi_{2,2} \right] - \\ & - \left[ \frac{r_1^3}{J_1} sh r_1 \lambda \Psi_{1,1} \Psi_{1,1} + \frac{r_2^3}{J_2} sh r_2 \lambda \Psi_{2,1} \Psi_{2,1} \right] \cdot \left[ \frac{r_1^3}{J_1} sh r_1 \lambda \Psi_{1,1} \Psi_{1,2} + \frac{r_2^3}{J_2} sh r_2 \lambda \Psi_{2,1} \Psi_{2,2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

Таким образом, уравнение (3.6.15) является вторым уравнением, решая которое совместно с характеристическим (3.6.2), определим значения  $r_n$  и найдем искомый параметр критической сжимающей нагрузки  $N_1$  и  $N_2$ .

Ряды, входящие в выражение (3.6.15), быстро сходятся, увеличивая порядок системы линейных уравнений (3.6.15), можно более точно определить искомые критические силы.

В таблице 3.6.1 приведены значения критической силы  $N_l$  для квадратной пластинки, сжатой в одном направлении в зависимости от числа членов ряда по  $n, m, k$ .

Таблица 3.6.1 - Результаты расчета.

Количество членов ряда по $n, m, k$ .	2	3	4
Значение критической силы $N_{l}$ .	24.1912	24.1867	24.1845

Как видно из таблицы 3.6.1 для определения критических сил достаточно два-три, члена ряда по  $n, m, k$  чтобы получить практически точное значение критической силы. Значение критической силы при трех членах разложения отличается на 0.02% от предыдущего.

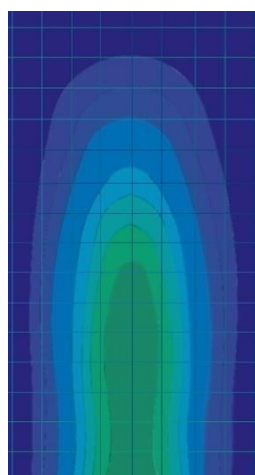
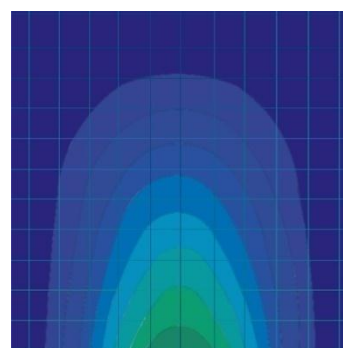
Кроме того, необходимо отметить, что для определения критических нагрузок желательно брать одинаковое число членов ряда по  $n, m, k$ . При проведении последующих вычислений было взято три члена ряда по  $n, m, k$ .

В таблице 3.6.2 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5; 1.0; 1.5; 2.0$ . и сжатой в одном направлении силой  $N_{l}$ .

Таблица № 3.6.2 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критической силы $N_{l}$ .	81.6656	24.0636	15.3327	12.3942

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.6.3).

 $\lambda=0.5$  $\lambda=1.0$

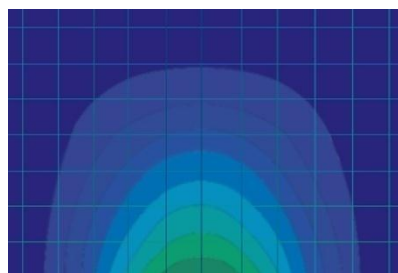
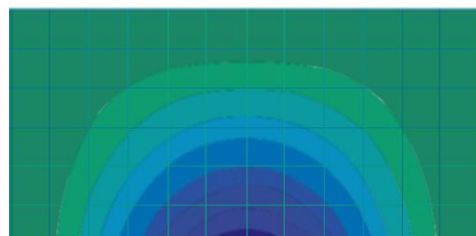
 $\lambda=1.5$  $\lambda=2.0$ 

Рисунок 3.6.3 – Формы потери устойчивости.

В таблице № 3.6.3 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5$ ; 1.0; 1.5; 2.0, сжатой в одном направлении силой  $N_2$  ( $N_1 = 0$ ).

Таблица № 3.6.3 Рисунок 3.6.3 – Формы потери устойчивости.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критической силы $N_2$ .	63.8899	16.8198	8.1593	4.6915

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.6.4).

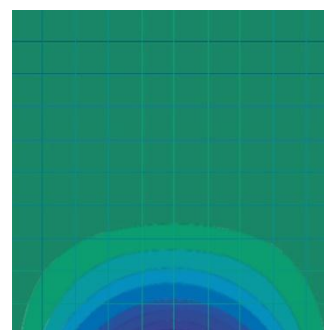
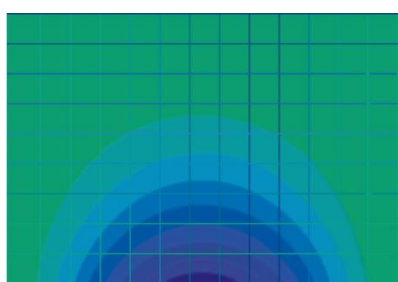
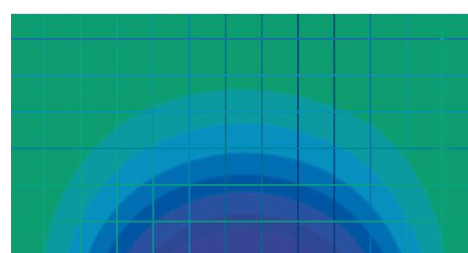
 $\lambda=0.5$  $\lambda=1.0$  $\lambda=1.5$  $\lambda=2.0$ 

Рисунок 3.6.4 – Формы потери устойчивости.

В таблице № 3.6.4 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5; 1.0; 1.5; 2.0$ , сжатой во взаимно перпендикулярных направлениях силами  $N_1 = N_2 = N$ .

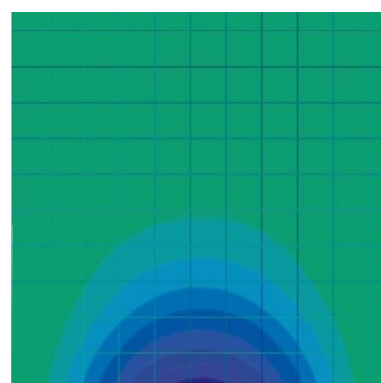
Таблица № 3.6.4 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критических сил $N_1$ и $N_2$ .	48.7796	12.4819	5.8763	3.8667

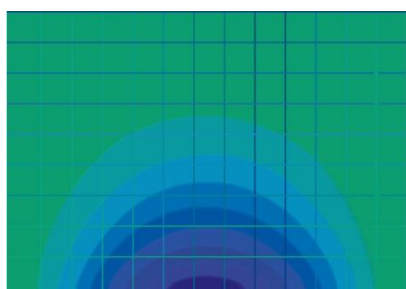
Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.6.5).



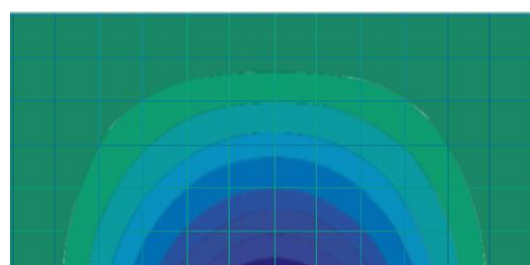
$\lambda=0.5$



$\lambda=1.0$



$\lambda=1.5$



$\lambda=2.0$

Рисунок 3.6.5 – Формы потери устойчивости.

Таким образом, данный способ решения задачи устойчивости позволяет достаточно точно определить формы потери устойчивости и значения критических сил, ограничившись всего двумя-тремя, членами ряда выражения (3.6.15).

### 3.1.7 Пластинка, шарнирно опертая по двум взаимно перпендикулярным сторонам, две стороны свободны.

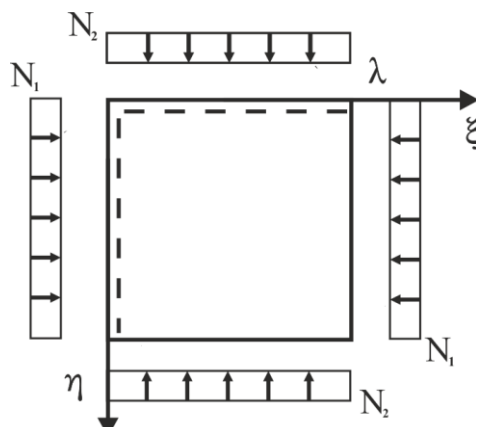


Рисунок 3.7.1 - Расчетная схема.

В качестве следующего примера рассмотрим пластинку, свободно опертую по двум смежным сторонам, а две остальные свободны от связей, (рисунок 3.7.1).

В рассматриваемом примере граничные условия на продольных сторонах пластинки

$$\begin{cases} \eta = 0; & W_0 = M_0 = 0; \\ \eta = 1; & M_y = Q_y = 0. \end{cases} \quad (3.7.1)$$

совпадают с граничными условиями в примере 3.1.2, поэтому характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$L(r_n) = \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} \left( C_n^2 \frac{\sin a_n}{a_n} \cos b_n - D_n^2 \frac{\sin b_n}{b_n} \cos a_n \right) = 0, \quad (3.7.2)$$

и прогиб:

$$\begin{aligned} \bar{W} = 2\text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \text{sh } r_n \xi + B_n \text{ch } r_n \xi) \cdot \\ \cdot \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} \left( C_n \frac{\sin b_n}{b_n} \cdot \frac{\sin a_n \eta}{a_n} - D_n \frac{\sin a_n}{a_n} \cdot \frac{\sin b_n \eta}{b_n} \right), \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

где  $C_n$  и  $D_n$ , определяются по формулам (3.2.4), а  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $\Delta_n$  - определяются по формулам (3.1.7).

Характеристическое уравнение (3.7.2) содержит неизвестные критические силы  $N_1$ ,  $N_2$  и бесконечное множество комплексных корней, поэтому аналогично примеру 3.1.6 для нахождения критических сил необходимо получить еще одно уравнение. Оно может быть получено из удовлетворения однородным условиям на поперечных сторонах пластинки с использованием соотношения обобщенной ортогональности (2.4.7), и метода перемещений, как было показано во второй главе.

Запишем граничные условия на поперечных краях  $\xi=0$ ,  $\xi=\lambda$ :

$$\xi = 0; \quad W = 0; \quad M_x = 0; \quad (3.7.4)$$



$$\xi = \lambda; M_x = 0; Q_x = 0.$$

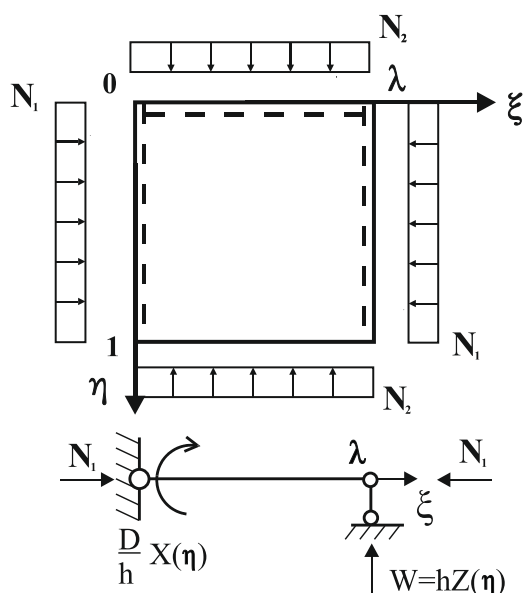


Рисунок 3.7.2 – Основная система.

Каждый член этого ряда удовлетворяет граничным условиям на продольных сторонах пластинки  $Z(\eta=0) = 0; Z(\eta=1) \neq 0$ .

Для основной системы метода перемещений граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \xi = 0; W = 0; M_x = 0; \\ \xi = \lambda; W = Z(\eta); M_x = 0. \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

Граничные условия на краю  $\xi=0$ , в основной системе и в заданной пластинке тождественны, следовательно выполняются точно, а на поперечной стороне  $\xi=\lambda$  совпадает только равенство нулю изгибающего момента  $M_x$ .

Отсюда следует, что второе уравнение для определения критической силы  $N$  можно получить из удовлетворения второго граничного условия в выражении (3.7.4), а именно из условия на краях  $\xi=0$  и  $\xi=\lambda$  равенства нулю поперечной перерезывающей силы  $Q_x$ .

Для стороны  $\xi=0$ :

$$Q_x = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n r_n [r_n^2 F_n(\eta) + (2 - \nu) F_n''(\eta)] = 0 \Rightarrow A_n = 0. \quad (3.7.7)$$

Для стороны  $\xi=\lambda$ :

Закрепим свободный край пластинки при  $\xi=\lambda$  вертикальной опорой (рисунок 3.7.2) перемещение которой обозначим  $W = hZ(\eta)$ , где  $Z(\eta)$  представим в виде разложения в тригонометрический ряд с неизвестными коэффициентами:

$$Z(\eta) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} E_m \sin \frac{2m-1}{2} \pi \eta. \quad (3.7.5)$$

$$Q_x = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n r_n sh r_n \lambda [r_n^2 F_n(\eta) + (2 - \nu) F_n''(\eta)] = 0. \quad (3.7.8)$$

Неизвестные коэффициенты  $B_n$  могут быть определены с помощью соотношения обобщенной ортогональности (2.4.7), полученное во второй главе:

$$B_n = \frac{1}{J_n} \left[ \int_0^1 f_1''(\eta) F_n''(\eta) d\eta - 2N_2 \int_0^1 f_1'(\eta) F_n'(\eta) d\eta \right], \quad (3.7.9)$$

где

$$J_n = \int_0^1 \left( F_n'^2(\eta) - 2N_2 F_n'^2(\eta) - r_n^4 F_n^2(\eta) \right) d\eta;$$

$$F_n(\eta) = \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} \left( C_n \frac{\sin b_n \sin a_n \eta}{b_n a_n} - D_n \frac{\sin a_n \sin b_n \eta}{a_n b_n} \right); \quad (3.7.10)$$

$$f_1(\eta) = -Z_{(\eta)}.$$

Подставив (3.7.9) в (3.7.8) и введя обозначение:

$$G_n(\eta) = r_n sh r_n \lambda \left( r_n^2 F_n(\eta) + (2 - \nu) F_n''(\eta) \right)$$

окончательно получим:

$$2Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(\eta)}{J_n} \left[ \int_0^1 \left( \sum_{m=1,2}^{\infty} E_m \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 F_n''(\eta) \sin \frac{2m-1}{2} \pi \eta \right) d\eta + \right. \\ \left. + 2N_2 \int_0^1 \left( \sum_{m=1,2}^{\infty} E_m \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right) F_n'(\eta) \cos \frac{2m-1}{2} \pi \eta \right) d\eta \right] = 0. \quad (3.7.11)$$

Воспользуемся свойством ортогональности тригонометрических функций, умножим выражение (3.7.11) на  $\sin \frac{2k-1}{2} \pi \eta$  и проинтегрируем по  $\eta$  в интервале от 0 до 1.

В итоге получим:

$$2Re \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{J_n} \int_0^1 \left( \sum_{m=1,2}^{\infty} E_m \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 F_n''(\eta) \sin \frac{2m-1}{2} \pi \eta \right) d\eta + \right. \\ \left. + 2N_2 \int_0^1 \left( \sum_{m=1,2}^{\infty} E_m \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right) F_n'(\eta) \cos \frac{2m-1}{2} \pi \eta \right) d\eta \right] \sin \frac{2k-1}{2} \pi \eta = 0. \quad (3.7.12)$$

$$+ \frac{2N_2}{J_n} \int_0^1 \left( \sum_{m=1,2}^{\infty} E_m \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right) F_n'(\eta) \cos \frac{2m-1}{2} \pi \eta \right) d\eta \Bigg].$$

$$\cdot \int_0^1 G_n(\eta) \sin \frac{2k-1}{2} \pi \eta d\eta = 0.$$

Преобразовав (3.7.12), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно  $E_m$ :

$$\sum_{m=1,2}^{\infty} E_m \sum_{n=1,2}^{\infty} \left( \frac{1}{J_n} \int_0^1 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 F_n''(\eta) \sin \frac{2m-1}{2} \pi \eta d\eta - \right. \quad (3.7.13)$$

$$\left. - 2N_2 \int_0^1 F_n'(\eta) \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right) \cos \frac{2m-1}{2} \pi \eta d\eta \right) \int_0^1 G_n(\eta) \sin \frac{2k-1}{2} \pi \eta d\eta = 0.$$

Ограничившись конечным числом членов ряда разложения по  $n$ ,  $m$ ,  $k$ , аналогично примеру 3.1.6, получим систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $E_m$ .

Приравняв к нулю определитель системы (3.7.13), получим недостающие уравнения, решая которые совместно с характеристическим уравнением (3.7.2) определим  $r_n$ , и найдем искомый параметр критической сжимающей нагрузки  $N$ .

Вычисления показали, что для определения критических нагрузок желательно брать одинаковое число членов ряда по  $n$ ,  $m$ ,  $k$ . При проведении последующих вычислений было взято три члена ряда по  $n$ ,  $m$ ,  $k$ .

В таблице 3.7.1 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5$ ; 1.0; 1.5; 2.0 и сжатой в одном направлении силой  $N_1$  ( $N_2=0$ ).

Таблица № 3.7.1 - Результаты расчета.

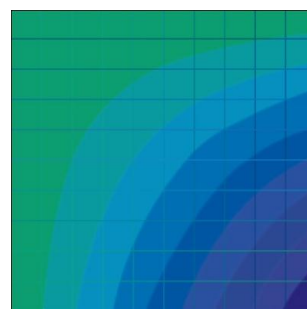
Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критической силы $N_1$ .	1.8608	1.9867	2.0133	2.0621

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы

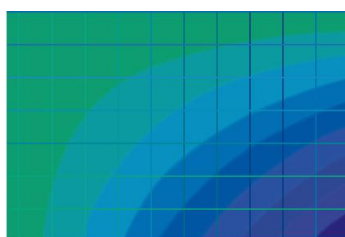
потери устойчивости (рисунок 3.7.3).



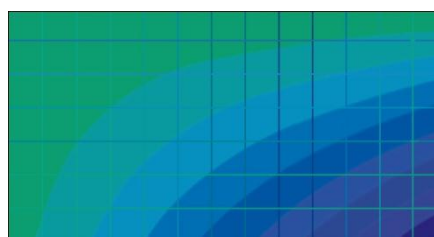
$\lambda=0.5$



$\lambda=1.0$



$\lambda=1.5$



$\lambda=2.0$

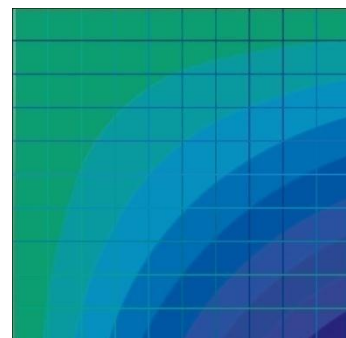
Рисунок 3.7.3 – Формы потери устойчивости.

В таблице № 3.7.2 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5$ ; 1.0; 1.5; 2.0, сжатой в одном направлении силой  $N_2$  ( $N_1 = 0$ ).

Таблица № 3.7.2 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критической силы $N_2$ .	7.9282	2.0137	0.8575	0.4784

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.7.4).



$\lambda=1.0$



Рисунок 3.7.4 – Формы потери устойчивости.

В таблице № 3.7.3 приведены значения критической нагрузки для прямоугольной пластинки с различными соотношениями сторон  $\lambda=0.5$ ; 1.0; 1.5; 2.0, сжатой во взаимно перпендикулярном направлении силами  $N_1=N_2=N$ .

Таблица № 3.7.3 - Результаты расчета.

Соотношение сторон $\lambda$ .	$\lambda=0.5$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$
Значение критических сил $N_1$ и $N_2$ .	1.5103	1.0008	0.6272	0.4043

Для полученных значений критических нагрузок ниже приведены формы потери устойчивости (рисунок 3.7.5).

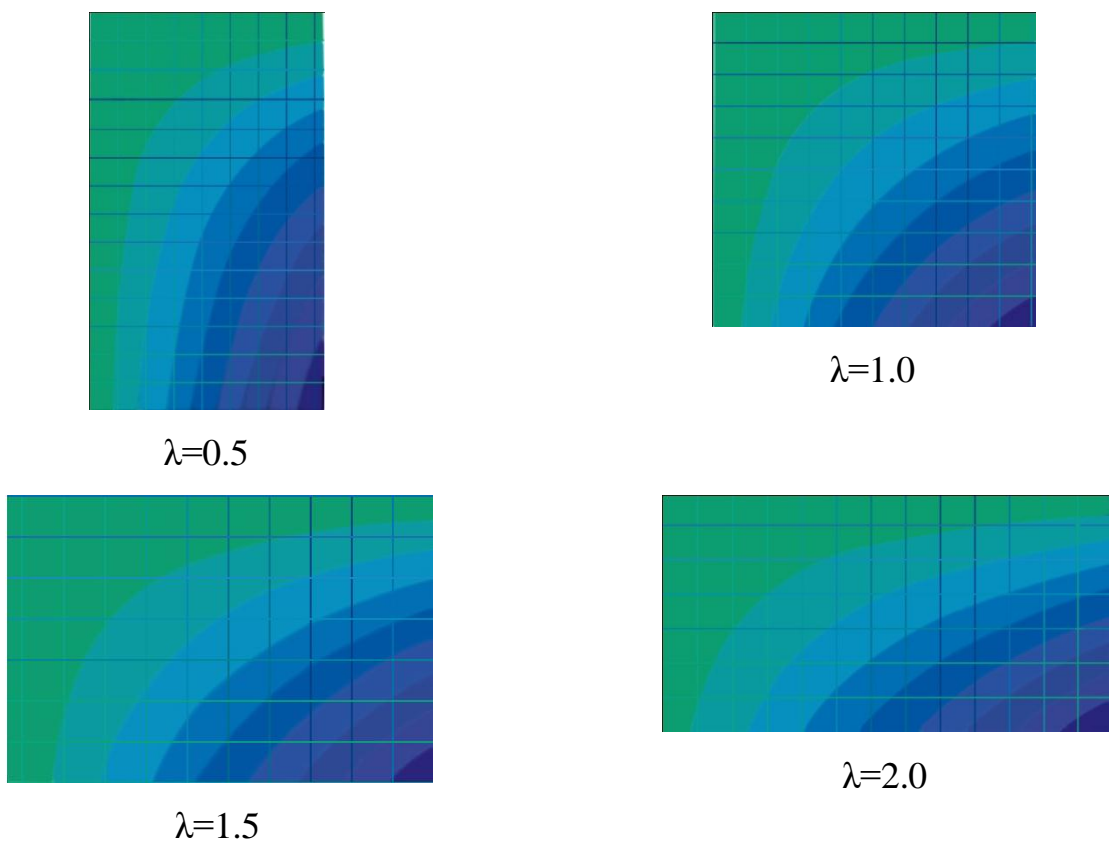


Рисунок 3.7.5 – Формы потери устойчивости.

При анализе результатов решения задач устойчивости пластин МНФ можно сделать следующие выводы:

1. Решение получается точно, когда поперечные стороны пластинки шарнирно оперты, заданы  $W = M_x = 0$  либо имеется ползун  $\varphi_x = Q_x = 0$  (примеры 3.1.1-3.1.5).

2. При вычислении критической силы, решая характеристическое уравнение и подставляя  $r_n$ , необходимо иметь ввиду, что наименьшее значение критическая нагрузка может иметь при любом числе полуволн «n» и параметр «n» определяет форму потери устойчивости (количество полуволн) в продольном направлении.

3. Решение получается приближенно, когда поперечные стороны пластинки жестко защемлены или свободны от опор (примеры 3.1.6-3.1.7).

4. Алгоритм решения задач в рассмотренных примерах показал, что результаты обладают устойчивой монотонной сходимостью и быстро сходятся с увеличением числа членов ряда разложения собственных функций.

5. В задачах, где решение может быть получено приближенно, количество членов ряда по n, m и k желательно принимать одинаковым и точное значение критической силы достигается уже при n=m=k=4 (погрешность между значением критической силы при n=m=k=3 и n=m=k=4 составляет 0,07%).

6. Значение искоемых критических сил в задаче с жестко защемленными поперечными краями сходится быстрее, чем в пластинке со свободной кромкой.

7. Возможные формы потери устойчивости, которые возникают при наименьшем значении нагрузки, при шарнирном опирании, более разнообразны, чем в случае жестко-защемленной или неподкрепленной пластинки.

7. Возможные формы потери устойчивости, которые возникают при наименьшем значении нагрузки, при шарнирном опирании, более разнообразны, чем в случае жестко-защемленной или неподкрепленной пластинки.

### 3.2 Примеры расчета прямоугольной сжато-изогнутой пластинки.

Для оценки влияния величины продольной силы на напряженно-деформированное состояние рассмотрим ряд примеров расчета прямоугольных сжато-изогнутых пластинок с различными условиями закрепления поперечных сторон, когда коэффициенты решения определяются точно или приближенно. Причем, для сравнительного анализа рассчитаем сначала пластинку при действии, только поперечной нагрузки, а затем при совместном действии продольных и поперечных сил. Во всех ниже рассмотренных примерах приняты следующие исходные данные:

- коэффициент Пуассона  $\nu=0.3$ ;

- поперечная равномерно-распределенная нагрузка  $P(\eta, \xi) = \frac{qh^3}{D} = 0.5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$

- модуль упругости  $E=200000 \text{ МПа}$ ;

- цилиндрическая жесткость пластинки  $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} = 0,1465 \text{ МН} \cdot \text{м.}$ ;

- размеры сторон пластинки  $h=1\text{м.}$  и  $l=1\text{м.}$  (соотношение сторон  $\lambda=1$ );

- толщина пластинки  $\delta=0.02\text{м.}$ ;

- продольные сжимающие усилия  $T_1 = \frac{2N_1D}{h^2}$ ;  $T_2 = \frac{2N_2D}{h^2}$ , которые примем в долях от критической силы.

**3.2.1. Изгиб пластинки, жестко защемленной по одной продольной стороне и второй свободной, две поперечные стороны шарнирно оперты (продольные силы отсутствуют  $N=0$ ).**

Составим алгоритм решения такого рода задач.

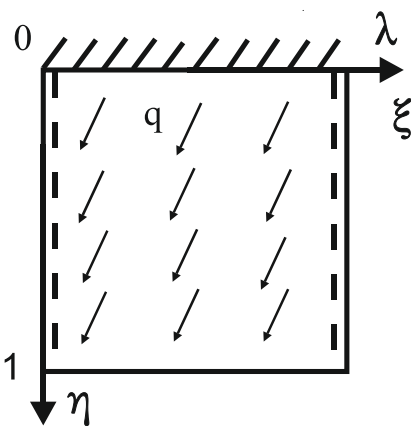


Рисунок 3.8.1 – Расчетная схема.

Выбрав оси координат, как показано на рисунке 3.8.1, из условия на начальной линии при  $\eta = 0$  можно записать:  $W_0 = \varphi_0 = 0$ . Алгоритм получения решения аналогичен примеру, рассмотренному в § 2.3. Операторы матрицы начальных функций для расчета изгибаемой пластинки приведены в таблице

2.1.2. (при  $N_1=N_2=0$ ).

В результате было получено решение задачи изгиба:

$$W = W_{(\eta)}^* + \bar{W} = \frac{Ph}{24} (\eta^4 - 4\eta^3 + 6\eta^2) 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \xi + B_n ch r_n \xi) F_n(\eta), \quad (3.8.1)$$

$$\begin{aligned} \text{где } F_n(\eta) = & \frac{\eta}{2r_n^2} \sin r_n \eta \left[ \frac{1-\nu}{2} r_n \cos r_n + \frac{1+\nu}{2} \sin r_n \right] + \\ & + \frac{1}{2r_n^3} [r_n \eta \cos r_n - \sin r_n \eta] \left[ \cos r_n - \frac{1-\nu}{2} r_n \sin r_n \right] \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

и характеристическое уравнение для нахождения  $r_n$ :

$$L(r_n) = -\frac{(1-\nu)^2 r_n^2}{4} + \cos^2 r_n + \frac{(1+\nu)^2}{4} \sin^2 r_n = 0. \quad (3.8.3)$$

Произвольные постоянные  $A_n$  и  $B_n$  находим из граничных условий на поперечных сторонах пластинки.

Правильность полученного частного решения подтверждается удовлетворением граничных условий на продольных сторонах пластинки:

$$\begin{aligned} \eta = 0, \quad W_{(\eta=0)}^* &= \frac{Ph}{24} (\eta^4 - 4\eta^3 + 6\eta^2) = 0, \quad \varphi_y = \frac{P}{24} (4\eta^3 - 12\eta^2 + 12\eta) = 0; \\ \eta = 1, \quad M_y^* &= \frac{-PD}{24h} (12\eta^2 - 24\eta + 12) = 0, \quad Q_y = \frac{-PD}{24h^2} (24\eta - 24) = 0 \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

и дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} = \frac{qh^4}{D} = \frac{Ph}{24}. \quad (3.8.5)$$

Таким образом, при определении общего решения, задача сводится к отысканию неизвестных коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  из удовлетворения граничных условий на поперечных сторонах пластинки.

Раскроем граничные условия на поперечных краях пластинки.

Для края  $\xi=0$  запишем:

$$W(\eta, 0) = W_{(\eta)}^* + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n(\eta) = 0; \quad (3.8.6)$$

$$(3.8.7)$$



$$M_x(\eta, 0) = M_{x(\eta)}^* + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n [r_n^2 F_n(\eta) + \nu F_n''(\eta)] = 0.$$

Уравнение (3.8.6) и (3.8.7) можно переписать в виде:

$$2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n(\eta) = -W_{(\eta)}^* = f_1(\eta); \quad (3.8.8)$$

$$2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n (r_n^2 F_n(\eta) + \nu F_n''(\eta)) = -M_{x(\eta)}^* = -\nu \frac{\partial^2 W_{(\eta)}^*}{\partial \eta^2} \Big|_{\xi=0}. \quad (3.8.9)$$

Продифференцировав дважды уравнение (3.8.8) умножим его на  $\nu$  и вычтем из (3.8.9) и получим:

$$2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n r_n^2 F_n(\eta) = -\nu \frac{\partial^2 W_{(\eta)}^*}{\partial \eta^2} \Big|_{\xi=0} - \nu f_1''(\eta) = f_2(\eta) = 0. \quad (3.8.10)$$

Воспользовавшись формулой (2.4.21) при  $N_1=N_2=0$ , получим выражение для определения коэффициента  $B_n$  для изогнутых пластин:

$$B_n = \frac{1}{J_n} \left[ \int_0^1 f_1''(\eta) F_n''(\eta) d\eta \right], \quad (3.8.11)$$

где 
$$J_n = \int_0^1 (F_n''^2(\eta) - r_n^4 F_n^2(\eta)) d\eta.$$

Теперь раскроем граничные условия на поперечном краю пластинки  $\xi=\lambda$ :

$$2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \lambda + B_n ch r_n \lambda) F_n(\eta) = -W_{(\eta)}^* = f_1(\eta); \quad (3.8.12)$$

$$2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \lambda + B_n ch r_n \lambda) (r_n^2 F_n(\eta) + \nu F_n''(\eta)) = -\nu \frac{\partial^2 W_{(\eta)}^*}{\partial \eta^2} \Big|_{\xi=\lambda}. \quad (3.8.13)$$

Обозначив  $C_n = A_n sh r_n \lambda + B_n ch r_n \lambda$  и воспользовавшись свойством обобщенной ортогональности (1.2.5), получим формулу для определения коэффициента  $C_n$ :

$$C_n = \frac{1}{J_n} \left[ \int_0^1 f_1''(\eta) F_n''(\eta) d\eta \right]. \quad (3.8.14)$$

Собственные функции  $F_n(\eta)$  имеют вид:

$$F_n(\eta) = \frac{\eta}{2r_n^2} \sin r_n \eta \left[ \frac{1-\nu}{2} r_n \cos r_n + \frac{1+\nu}{2} \sin r_n \right] + \frac{1}{2r_n^3} [r_n \eta \cos r_n - \sin r_n \eta] \left[ \cos r_n - \frac{1-\nu}{2} r_n \sin r_n \right]. \quad (3.8.15)$$

Определим значения прогиба  $W(\eta, \xi)$  и изгибающего момента  $M_y(\eta, \xi)$  в характерных точках.

По таблицам 3.8.1 и 3.8.2 можно проследить характер изменения значений прогиба и моментов в точке  $\eta = 1, \xi = 0,5$  в зависимости от числа удерживаемых членов ряда по  $n$ .

Таблица 3.8.1 - Прогиб  $W$  (м) в зависимости от количества членов ряда по  $n$ .

	n=1	n=2	n=3	n=4
$\eta = 1, \xi = 0,5$	$31.24 \cdot 10^{-3}$	$35.92 \cdot 10^{-3}$	$36.39 \cdot 10^{-3}$	$36.41 \cdot 10^{-3}$
Отличие в % от предыдущего.	-	13,9	1,3	0,05

Таблица 3.8.2 - Изгибающий момент  $M_y$  (Н·м) в зависимости от количества членов ряда по  $n$ .

	n=1	n=2	n=3	n=4
$\eta = 0, \xi = 0,5$	$-23.47 \cdot 10^3$	$-48.54 \cdot 10^3$	$-53.13 \cdot 10^3$	$-53.24 \cdot 10^3$
Отличие в % от предыдущего.	-	69,64	8,6	0,21

Как видно из таблиц 3.8.1 и 3.8.2 в дальнейшем уточнении решений нет необходимости, результаты вычислений совпадают в пределах двух значащих цифр уже в первом приближении и для получения практически точного результата достаточно взять не более 3-4 членов ряда. В таблице 3.8.3 приведены значения прогибов  $W$  и моментов  $M_y, M_x$  в характерных точках пластинки. Величина прогиба дана в метрах, изгибающего момента в Н\*м.

Таблица 3.8.3 - Результаты расчета.

	$\eta$	$\xi$	Величина прогиба (м) или момента (Н·м).
$W$	0.5	0	$0.023 \cdot 10^{-3} \approx 0(0.06\% \text{ от } W_{\max})$
	0	0.5	0
	0.5	0.5	$18.75 \cdot 10^{-3}$
	1.0	0.5	$36.41 \cdot 10^{-3}$

$M_y$	0	0.5	$-53.24 \cdot 10^3$
	0.5	0.5	$13.76 \cdot 10^3$
	1.0	0.5	0
$M_x$	0.5	0	$0.1 \cdot 10^3 \approx 0$ (1.2% от $M_{\max}$ )
	0.5	0.5	$26.90 \cdot 10^3$
	1.0	0.5	$45.52 \cdot 10^3$

При вычислении прогиба и изгибающих моментов в пластинке учитывались четыре члена ряда по «n».

### 3.2.2 Сжато-изогнутая пластинка с граничными условиями рассмотренными в примере 3.2.1.

Рассмотрим ту же пластинку с теми же граничными условиями и той же поперечной нагрузкой, но под действием еще сжимающих в срединной плоскости сил  $N_1$  и  $N_2$  рисунок 3.8.1.

Порядок расчета будет точно такой же, как и в примере 3.2.1, с той лишь разницей, что операторы начальных функций необходимо брать из таблицы 2.1.2 причем, частное решение дифференциального уравнения, в силу совпадения

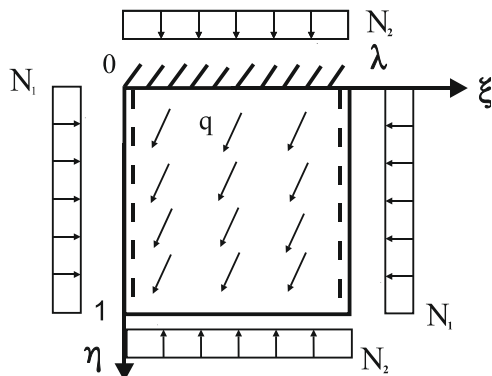


Рис.3.9.1

граничных условий на продольных сторонах пластинки и вида загрузки поперечной нагрузкой, совпадает с частным решением в примере 3.2.1 и имеет вид:

$$W_{(\eta)}^* = \frac{Ph}{24} (\eta^4 - 4\eta^3 + 6\eta^2). \quad (3.9.1)$$

Поэтому, остановимся на определении основных выражений, позволяющих определить общее решение дифференциального уравнения.

Общее решение будем искать в виде:

$$\bar{W} = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \xi + B_n ch r_n \xi) F_n(\eta). \quad (3.9.2)$$

Значение корней  $r_n$  получим из характеристического уравнения (3.3.3), а функции  $F_n(\eta)$  определяются по формуле (3.3.4).

Численные значения неизвестных коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  определим из удовлетворения граничных условий на поперечных сторонах пластинки по следующим формулам:

$$A_n = \frac{C_n - B_n ch r_n \lambda}{sh r_n \lambda}; \quad (3.9.3)$$

$$B_n = \frac{1}{J_n} \int_0^1 f_1''(\eta) F_n''(\eta) d\eta - 2N_2 \int_0^1 f_1'(\eta) F_n'(\eta) d\eta;$$

$$\text{где } C_n = \frac{1}{J_n} \int_0^1 f_1''(\eta) F_n''(\eta) d\eta - 2N_2 \int_0^1 f_1'(\eta) F_n'(\eta) d\eta,$$

$$\text{где } J_n = \int_0^1 \left( F_n''^2(\eta) - 2N_2 F_n'^2(\eta) - r_n^4 F_n^2(\eta) \right) d\eta;$$

$$f_1(\eta) = -W_{(\eta)}^*;$$

(3.9.4)

$$F_n(\eta) = \frac{1}{(a_n^2 - b_n^2)^2} \left[ (\cos b_n \eta - \cos a_n \eta) \left( C_n \frac{\sin a_n}{a_n} - D_n \frac{\sin b_n}{b_n} \right) + \left( \frac{\sin a_n \eta}{a_n} - \frac{\sin b_n \eta}{b_n} \right) (C_n \cos a_n - D_n \cos b_n) \right];$$

$$a_n = \sqrt{N_2 + r_n^2 + \Delta_n}; \quad b_n = \sqrt{N_2 + r_n^2 - \Delta_n}; \quad \Delta_n = \sqrt{N_2^2 - r_n^2 (2N_1 - 2N_2)}..$$

Воспользовавшись рассмотренным в предыдущем примере алгоритмом, рассчитаем квадратную пластинку, с различными вариантами загрузки, при действии равномерно распределенной внешней поперечной нагрузки  $q(\xi, \eta)$  и продольных сжимающих сил  $T_1$  и  $T_2$ , причем значение продольных сил примем в долях от критической силы.

Рассмотрим пластинку, находящуюся под действием поперечной нагрузки, и трех комбинаций загрузки продольной силой  $T$ :

- 1) пластинка сжата в одном направлении силой  $T_1$ ;
- 2) пластинка сжата в одном направлении силой  $T_2$ ;
- 3) пластинка сжата в двух взаимно-перпендикулярных направлениях  $T_1 = T_2$ .

В таблице 3.9.1 приведены значения прогиба  $W(\eta, \xi)$  и изгибающих

моментов  $M_y(\eta, \xi)$  и  $M_x(\eta, \xi)$  в характерных точках пластинки находящейся под действием поперечной нагрузки  $q(\xi, \eta)$  и сжатой в одном направлении силой  $T_1$ . Величина прогиба дана в метрах, изгибающего момента в Н\*м. В скобках приведено разниця между предыдущим значением и последующим.

Таблица 3.9.1 - Результаты расчета.

	$\eta$	$\xi$	$T_1=0.0T_{кр}$	$T_1=0.05T_{кр}$	$T_1=0.1T_{кр}$	$T_1=0.2T_{кр}$
$W$	0.5	0	$0.023 \cdot 10^{-3} \approx 0$	$0.019 \cdot 10^{-3} \approx 0$	$0.018 \cdot 10^{-3} \approx 0$	$0.021 \cdot 10^{-3} \approx 0$
	0	0.5	0	0	0	0
	0.5	0.5	$18.75 \cdot 10^{-3}$	$19.59 \cdot 10^{-3}$ (4.3%)	$20.50 \cdot 10^{-3}$ (4.4%)	$22.63 \cdot 10^{-3}$ (9.4%)
	1.0	0.5	$36.41 \cdot 10^{-3}$	$38.22 \cdot 10^{-3}$ (4.7%)	$40.18 \cdot 10^{-3}$ (4.1%)	$44.71 \cdot 10^{-3}$ (10.0%)
$M_y$	0	0.5	$-53.24 \cdot 10^3$	$-55.11 \cdot 10^3$ (4.4%)	$-57.14 \cdot 10^3$ (3.8%)	$-62.86 \cdot 10^3$ (10.1%)
	0.5	0.5	$13.76 \cdot 10^3$	$14.25 \cdot 10^3$ (3.4%)	$14.80 \cdot 10^3$ (4.3%)	$16.49 \cdot 10^3$ (10.0%)
	1.0	0.5	0	0	0	0
$M_x$	0.5	0	$0.1 \cdot 10^3 \approx 0$	$0.11 \cdot 10^3 \approx 0$	$0.10 \cdot 10^3 \approx 0$	$0.11 \cdot 10^3 \approx 0$
	0.5	0.5	$26.90 \cdot 10^3$	$28.10 \cdot 10^3$ (4.1%)	$29.40 \cdot 10^3$ (4.4%)	$32.42 \cdot 10^3$ (9.3%)
	1.0	0.5	$45.52 \cdot 10^3$	$47.85 \cdot 10^3$ (4.3%)	$50.37 \cdot 10^3$ (4.7%)	$56.19 \cdot 10^3$ (10.1%)

Из приведенных результатов следует, что увеличение продольной силы в два раза при малых значениях ( $0.05T_{кр}-0.1T_{кр}$ ) приводит к изменению прогиба и изгибающего момента в пределах 4-6 % при большей величине продольной силы ( $0.1T_{кр}-0.2T_{кр}$ ) на 8-11%.

В таблице 3.9.2 приведены значения прогиба  $W(\eta, \xi)$  и изгибающих моментов  $M_y(\eta, \xi)$  и  $M_x(\eta, \xi)$  в характерных точках пластинки находящейся под действием поперечной нагрузки  $q(\eta, \xi)$  и сжатой в одном направлении силой  $T_2$ .

Таблица 3.9.2 - Результаты расчета.

	$\eta$	$\xi$	$T_2=0.0T_{кр}$	$T_2=0.05T_{кр}$	$T_2=0.1T_{кр}$	$T_2=0.2T_{кр}$
$W$	0.5	0	$0.023 \cdot 10^{-3} \approx 0$	$0.021 \cdot 10^{-3} \approx 0$	$0.019 \cdot 10^{-3} \approx 0$	$0.020 \cdot 10^{-3} \approx 0$
	0	0.5	0	0	0	0
	0.5	0.5	$18.75 \cdot 10^{-3}$	$19.19 \cdot 10^{-3}$ (2.3%)	$19.52 \cdot 10^{-3}$ (1.7%)	$20.23 \cdot 10^{-3}$ (4.3%)
	1.0	0.5	$36.81 \cdot 10^{-3}$	$37.91 \cdot 10^{-3}$ (2.9%)	$38.98 \cdot 10^{-3}$ (2.7%)	$41.28 \cdot 10^{-3}$ (4.3%)
$M_y$	0	0.5	$-53.24 \cdot 10^3$	$-53.65 \cdot 10^3$ (0.8%)	$-53.93 \cdot 10^3$ (0.6%)	$-54.46 \cdot 10^3$ (4.3%)
	0.5	0.5	$13.76 \cdot 10^3$	$13.83 \cdot 10^3$ (0.6%)	$13.88 \cdot 10^3$ (0.4%)	$13.96 \cdot 10^3$ (4.3%)
	1.0	0.5	0	0	0	0
	0.5	0	$0.104 \cdot 10^3 \approx 0$	$0.112 \approx 0$	$0.106 \approx 0$	$0.110 \approx 0$

$M_x$	0.5	0.5	$26.90 \cdot 10^3$	$27.34 \cdot 10^3$ (1.6%)	$27.79 \cdot 10^3$ (1.6%)	$28.72 \cdot 10^3$ (3.2%)
	1.0	0.5	$45.52 \cdot 10^3$	$46.57 \cdot 10^3$ (2.3%)	$47.86 \cdot 10^3$ (2.7%)	$50.21 \cdot 10^3$ (4.4%)

При сжатии пластинки нагрузкой  $T_1$  внутренние усилия и деформации больше чем при сжатии и нагрузкой  $T_2$  примерно на 2 процента.

В таблице 3.9.3 приведены значения прогиба  $W(\eta, \xi)$  и изгибающих моментов  $M_y(\eta, \xi)$  и  $M_x(\eta, \xi)$  в характерных точках пластинки находящейся под действием поперечной нагрузки  $q(\xi, \eta)$  и сжатой в двух направлениях силами  $T_1$  и  $T_2$ .

Таблица 3.9.3 - Результаты расчета.

	$\eta$	$\xi$	$T_1=T_2=0.0T_{кр}$	$T_1=T_2=0.05T_{кр}$	$T_1=T_2=0.1T_{кр}$	$T_1=T_2=0.2T_{кр}$
$W$	0.5	0	$0.023 \cdot 10^{-3} \approx 0$	$0.021 \cdot 10^{-3} \approx 0$	$0.022 \cdot 10^{-3} \approx 0$	$0.019 \cdot 10^{-3} \approx 0$
	0	0.5	0	0	0	0
	0.5	0.5	$18.75 \cdot 10^{-3}$	$19.66 \cdot 10^{-3}$ (4.6%)	$20.46 \cdot 10^{-3}$ (3.9%)	$22.31 \cdot 10^{-3}$ (8.6%)
	1.0	0.5	$36.41 \cdot 10^{-3}$	$38.14 \cdot 10^{-3}$ (4.5%)	$40.00 \cdot 10^{-3}$ (4.6%)	$44.26 \cdot 10^{-3}$ (9.6%)
$M_y$	0	0.5	$-53.24 \cdot 10^3$	$-54.67 \cdot 10^3$ (2.6%)	$-56.19 \cdot 10^3$ (2.6%)	$-59.66 \cdot 10^3$ (5.8%)
	0.5	0.5	$13.76 \cdot 10^3$	$14.13 \cdot 10^3$ (2.5%)	$14.53 \cdot 10^3$ (2.8%)	$15.48 \cdot 10^3$ (6.1%)
	1.0	0.5	0	0	0	0
$M_x$	0.5	0	$0.104 \approx 0$	$0.095 \approx 0$	$0.105 \approx 0$	$0.096 \approx 0$
	0.5	0.5	$26.90 \cdot 10^3$	$27.36 \cdot 10^3$ (1.7%)	$28.45 \cdot 10^3$ (3.8%)	$30.96 \cdot 10^3$ (8.1%)
	1.0	0.5	$45.52 \cdot 10^3$	$46.85 \cdot 10^3$ (2.6%)	$49.16 \cdot 10^3$ (4.6%)	$54.43 \cdot 10^3$ (9.7%)

Сравнивая результаты расчета изогнутой и сжато-изогнутой квадратной пластинки, можно сделать вывод, что наличие продольной силы существенно увеличивает деформации и внутренние усилия. Причем изменения носят нелинейный характер.

**3.2.3. Изгиб пластинки, жестко защемленной по трем сторонам и одна сторона свободна (без сжимающих сил  $N=0$ ).**

Теперь в качестве примера рассмотрим задачу изгиба пластинки,

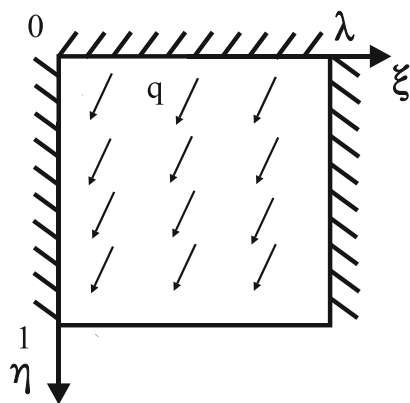


Рис.3.10.1 – Расчетная схема.

три стороны, которой жестко заделаны, а одна свободна от опор (рисунок 3.10.1). В этом случае граничные условия на поперечных сторонах могут быть удовлетворены приближенно с использованием соотношения обобщенной ортогональности и метода сил.

Поскольку нагрузка и граничные условия на продольных сторонах пластинки  $\eta=0$ ,  $\eta=1$  совпадают с граничными условиями в примере 3.2.1, то общее решение имеет тот же вид (3.8.5), что был получен в предыдущем примере. Необходимо лишь найти коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  решения из граничных условий на поперечных сторонах.

Характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$L(r_n) = -\frac{(1-\nu)^2 r_n^2}{4} + \cos^2 r_n + \frac{(1+\nu)^2}{4} \sin^2 r_n = 0. \quad (3.10.1)$$

Алгоритм расчета будет точно такой же, как и в примере 3.2.1, поэтому остановимся на основных формулах и выражениях позволяющих выполнить расчет.

Частное решение дифференциального уравнения (1.3.1) имеет вид:

$$W_{(\eta)}^* = \frac{Ph}{24} (\eta^4 - 4\eta^3 + 6\eta^2). \quad (3.10.2)$$

Остановимся более подробно на отыскании общего решения дифференциального уравнения.

Запишем граничные условия на поперечных краях пластинки:

$$\xi = 0; \quad W = 0; \quad \varphi_x = 0; \quad (3.10.3)$$

$$\xi = \lambda; \quad W = 0; \quad \varphi_x = 0. \quad (3.10.4)$$

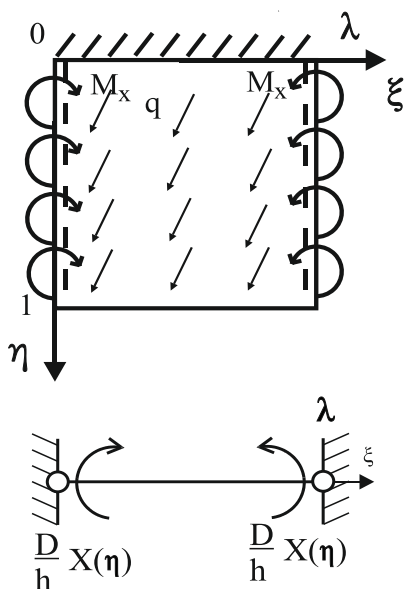


Рисунок 3.10.2 – Основная система.

Выберем основную систему метода сил, для чего на поперечных краях пластинки врежем шарнир и приложим пока неизвестный распределенный момент

$$M_x = \frac{D}{h} X(\eta), \text{ где } X(\eta)$$

представим в виде тригонометрического ряда с неизвестными коэффициентами:

$$X(\eta) = \sum_{m=1,2}^{\infty} E_m \sin \frac{2m-1}{2} \pi \eta, \quad (3.10.5)$$

каждый член ряда которого соответствует граничным условиям на продольных сторонах при  $\eta=0$   $X(\eta=0) = 0$ ; при  $\eta=1$   $X(\eta=1) \neq 0$ .

Граничные условия для основной системы метода сил имеют вид:

$$\xi = 0; \quad W = 0; \quad M_x = \frac{D}{h} X(\eta); \quad (3.10.6)$$

$$\xi = \lambda; \quad W = 0; \quad M_x = \frac{D}{h} X(\eta). \quad (3.10.7)$$

Сравнивая (3.10.3), (3.10.4) с (3.10.6), (3.10.7), нетрудно заметить, что первое условие (3.10.3) и (3.10.6), на краях  $\xi=0$ ,  $\xi=\lambda$  в основной системе и в заданной пластинке тождественны, следовательно выполняются точно, вторые условия (3.10.4) и (3.10.7) не совпадают, что приводит к необходимости получения следующих разложений, аналогичных полученным ранее (2.4.17) и (2.4.20):

$$2\text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} B_n F_n(\eta) = -W_{(\eta)}^* = f_1(\eta); \quad (3.10.8)$$

$$2\text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} B_n r_n^2 F_n(\eta) = -X(\eta) - \nu \frac{\partial^2 W_{(\eta)}^*}{\partial \eta^2} \Big|_{\xi=0;\lambda} - \frac{\partial^2 W_{(\eta)}^*}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=0;\lambda} - \nu f_1''(\eta) = f_2(\eta). \quad (3.10.9)$$

Отсюда следует, что задача сводится к определению действительной функции  $X(\eta)$ , входящей в формулу для нахождения коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$ , при



которой удовлетворялось бы равенство нулю угла поворота  $\varphi_x$  на краях  $\xi = 0$  и  $\xi = \lambda$ .

А именно:

- для стороны  $\xi=0$ :

$$\varphi_x = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n r_n F_n(\eta) = 0 \quad \Rightarrow A_n = 0; \quad (3.10.10)$$

- для стороны  $\xi=\lambda$ :

$$\varphi_x = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n r_n \operatorname{sh} r_n \lambda F_n(\eta) = 0. \quad (3.10.11)$$

Используя, свойство обобщенной ортогональности, для изогнутых пластин, получим формулу для определения неизвестных коэффициентов  $B_n$ :

$$B_n = \frac{1}{J_n} \int_0^1 (f_1''(\eta) F_n''(\eta) - r_n^2 f_2(\eta) F_n(\eta)) d\eta, \quad (3.10.12)$$

где

$$J_n = \int_0^1 (F_n''^2(\eta) - r_n^4 F_n^2(\eta)) d\eta;$$

$$f_1 = -W_{(\eta)}^*;$$

$$f_2(\eta) = -X_{(\eta)} = - \sum_{m=1,2}^{\infty} E_m \sin \frac{2m-1}{2} \pi \eta;$$

$$F_n(\eta) = \frac{\eta \sin r_n \eta}{2r_n} \left[ \frac{(1-\nu)}{2} \cos r_n + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\sin r_n}{r_n} \right] + \\ + \frac{1}{2r_n} \left[ \eta \cos r_n \eta - \frac{\sin r_n \eta}{r_n} \right] \left[ \frac{\cos r_n}{r_n} - \frac{(1-\nu)}{2} \sin r_n \right].$$

Подставив разложение (3.10.5) в формулу (3.10.12), получим решение задачи с точностью до неизвестных коэффициентов разложения  $E_m$ .

Значения этих коэффициентов определим из канонических уравнений, с помощью метода ортогонализации к полной системе функций, по которой раскладывали  $X_{(\eta)}$  при условии удовлетворения граничных условий на поперечных сторонах пластинки, а именно  $\varphi_x = 0$ :

$$\varphi_x = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n F_n(\eta) sh r_n \lambda}{J_n} \left[ \int_0^1 \left( f_1''(\eta) F_n''(\eta) - r_n^2 \sum_{m=1}^{\infty} E_m F_n(\eta) \sin \frac{2m-1}{2} \pi \eta \right) d\eta \right] = 0 \quad (3.10.13)$$

Введя обозначение:

$$\psi_{nm} = \int_0^1 F_n(\eta) \sin \frac{2m-1}{2} \pi \eta d\eta$$

выражение (3.10.13) примет более компактный вид:

$$\varphi_x = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n F_n(\eta) sh r_n \lambda}{J_n} \left[ \int_0^1 f_1''(\eta) F_n''(\eta) d\eta - r_n^2 \sum_{m=1}^{\infty} E_m \psi_{nm} \right] = 0 \quad (3.10.14)$$

Умножим выражение (3.10.14) на  $\sin \frac{2k-1}{2} \pi \eta$  и проинтегрируем в промежутке  $0 \leq \eta \leq 1$ . Получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных  $E_m$ .

$$\sum_{m=1,2}^{\infty} E_m \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{r_n^3 sh r_n \lambda}{J_n} \psi_{nm} \psi_{nk} = \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{r_n sh r_n \lambda}{J_n} \int_0^1 f_1''(\eta) F_n''(\eta) d\eta \psi_{nk}. \quad (3.10.15)$$

Взяв конечное число членов ряда, присваивая индексам  $m, n, k$  соответствующие значения (1, 2, 3 и т.д.), получим конечную систему алгебраических уравнений.

В первом приближении уравнение (3.10.15) примет вид:

$$E_1 \frac{r_1^3 sh r_1 \lambda}{J_1} \psi_{11} \psi_{11} = \frac{r_1 sh r_1 \lambda}{J_1} \psi_{11} \int_0^1 f_1''(\eta) F_1''(\eta) d\eta. \quad (3.10.16)$$

Из уравнения (3.10.16) определим в первом приближении значение  $E_1$ :

$$E_1 = \frac{1}{r_1^2 \psi_{11}} \int_0^1 f_1''(\eta) F_1''(\eta) d\eta. \quad (3.10.17)$$

В таблице 3.10.1 приведены значения  $E_1$  в зависимости от количества членов ряда по  $n$  и  $k$ .

Таблица 3.10.1 - Результаты расчета.

n	1	2	3	4
$E_1$	-0.026037	-0.02785	-0.02862	-0.028780
Отличие в % от предыдущего	-	7	2,7	0,5

Увеличивая порядок системы уравнений (3.10.15) получим:

$$\begin{aligned}
 0.135236 E_1 + 0.011101 E_2 - 0.003668 E_3 \dots &= -0.003893 \\
 0.011101 E_1 + 0.049317 E_2 + 0.002346 E_3 \dots &= -0.000467 \\
 -0.003668 E_1 + 0.002346 E_2 - 0.030621 E_3 \dots &= 0.000137
 \end{aligned}
 \tag{3.10.18}$$

.....

Решение последовательно одного, двух, трех, четырех уравнений дает следующие результаты:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= -0.028780; \\
 E_1 &= -0.028538; E_2 = -0.0030507; \\
 E_1 &= -0.028496; E_2 = -0.0031230; E_3 = 0.001326; \\
 E_1 &= -0.028487; E_2 = -0.0031413; E_3 = 0.001338; E_4 = -0.0006149.
 \end{aligned}
 \tag{3.10.19}$$

Как видно из выражений (3.10.19) увеличение порядка системы линейных уравнений незначительно влияет на значения постоянных  $E_m$ .

Вместе с тем, как показали вычисления при определении коэффициентов  $E_m$ , с увеличением порядка системы (3.10.18) необходимо увеличивать число членов ряда по n. Целесообразно принимать  $n=m$ .

Определив значения  $E_m$ , можно вычислить значения усилий и перемещений в любой точке пластинки как угодно точно удовлетворить граничным условиям на поперечных сторонах.

При вычислении значений усилий мы ограничились четырьмя членами ряда по m, что соответствует смягчению граничных условий на поперечных кромках. Вычисления показали, что учет более четырех членов ряда по m несущественно влияет на значение постоянных  $B_n$ , так и на значения внутренних усилий и перемещений.

Приняв исходные данные, указанные в п. 3.6, определим некоторые значения

усилий и перемещений (таблица 3.10.2) в характерных точках пластинки в зависимости от числа членов ряда по  $n$ .

Таблица 3.10.2 - Результаты расчета.

	$\eta$	$\xi$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	Отличие в % от предыдущего
$W$	0.5	0	$0.341 \cdot 10^{-3}$	$0.1154 \cdot 10^{-3}$	$0.021 \cdot 10^{-3}$	$0.0195 \cdot 10^{-3} \approx 0$	0,7
	0	0.5	0	0	0	0	0
	0.5	0.5	$34.87 \cdot 10^{-3}$	$13.98 \cdot 10^{-3}$	$6.24 \cdot 10^{-3}$	$6.30 \cdot 10^{-3}$	0,9
	1.0	0.5	$23.69 \cdot 10^{-3}$	$14.70 \cdot 10^{-3}$	$10.03 \cdot 10^{-3}$	$9.94 \cdot 10^{-3}$	0,8
$M_y$	0	0.5	$-16.59 \cdot 10^3$	$-22.65 \cdot 10^3$	$-24.32 \cdot 10^3$	$-24.72 \cdot 10^3$	1,1
	0.5	0.5	$4.85 \cdot 10^3$	$6.78 \cdot 10^3$	$7.85 \cdot 10^3$	$7.97 \cdot 10^3$	1,5
	1.0	0.5	0	0	0	0	0
$M_x$	0.5	0	$-19.53 \cdot 10^3$	$-25.32 \cdot 10^3$	$-28.74 \cdot 10^3$	$-29.03 \cdot 10^3$	1,0
	0.5	0.5	$9.88 \cdot 10^3$	$12.95 \cdot 10^3$	$14.96 \cdot 10^3$	$15.08 \cdot 10^3$	1,3
	1.0	0.5	$13.54 \cdot 10^3$	$17.66 \cdot 10^3$	$19.87 \cdot 10^3$	$20.38 \cdot 10^3$	1,1

Как видно из таблицы 3.10.2 в решениях достаточно удержать два-три члена ряда, чтобы получить практически точные значения прогиба и изгибающих моментов как внутри области, так и на границе. Кроме того значения моментов на линии  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  совпадают, что соответствует условиям симметрии граничных условий.

**Пример 3.2.4. Сжато-изогнутая пластинка с граничными условиями, рассмотренными в примере 3.2.3.**

Теперь рассмотрим пластинку с теми же граничными условиями, той же поперечной нагрузкой, но под действием еще сжимающих в срединной плоскости сил  $N_1$  и  $N_2$  рисунок 3.11.1.

Порядок расчета будет точно такой же, как и в примере 3.2.3, только операторы начальных функций необходимо брать из таблицы 2.1.2, кроме того

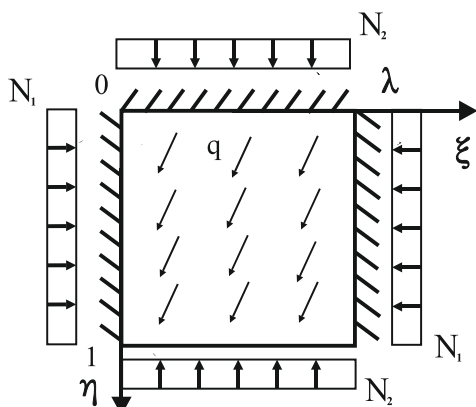


Рисунок 3.11.1 - Расчетная схема.

частное решение дифференциального уравнения (1.3.1) совпадает с частным решением в примере 3.2.1, по причине совпадения условий закрепления продольных сторон и поперечной нагрузки, и имеет вид:

$$W_{(\eta)}^* = \frac{Ph}{24} (\eta^4 - 4\eta^3 + 6\eta^2). \quad (3.11.1)$$

Поэтому, остановимся на определении основных выражений, позволяющих определить коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  общего решения дифференциального уравнения.

Граничные условия на поперечных сторонах пластинки удовлетворим приближенно с помощью метода сил.

Выберем основную систему метода сил (рисунок 3.8.3), для чего на

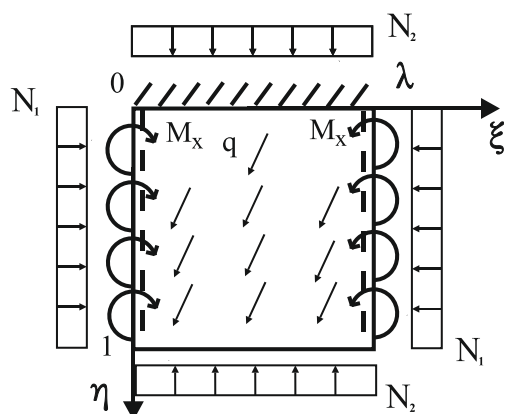


Рисунок 3.11.2 – Основная система.

поперечных краях пластинки врежем шарнир и приложим пока неизвестный распределенный момент  $M_x = \frac{D}{h} X_{(\eta)}$ , где  $X_{(\eta)}$  представим в виде тригонометрического ряда с неизвестными коэффициентами:

$$X_{(\eta)} = \sum_{m=1,2}^{\infty} E_m \sin \frac{2m-1}{2} \pi \eta.$$

Общее решение дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$\bar{W} = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n sh r_n \xi + B_n ch r_n \xi) F_n(\eta). \quad (3.11.2)$$

Раскрывая последовательно граничные условия на двух поперечных краях пластинки и воспользовавшись полученным в главе 2 свойством обобщенной ортогональности запишем формулы для определения произвольных постоянных

$A_n$  и  $B_n$ .

Из граничных условий на краю  $\xi=0$ :

$$B_n = \frac{1}{J_n} \int_0^1 [f_1''(\eta)F_n''(\eta) - 2N_2 f_1'(\eta)F_n'(\eta) - r_n^2 f_2 F_n(\eta)] d\eta. \quad (3.11.3)$$

Из граничных условий на краю  $\xi=\lambda$ :

$$A_n = \frac{C_n - B_n \operatorname{ch} r_n \lambda}{\operatorname{sh} r_n \lambda}; \quad (3.11.4)$$

$$C_n = \frac{1}{J_n} \int_0^1 [f_1''(\eta)F_n''(\eta) - 2N_2 f_1'(\eta)F_n'(\eta) - r_n^2 f_2 F_n(\eta)] d\eta,$$

где  $J_n = \int_0^1 (F_n''^2(\eta) - 2N_2 F_n'^2(\eta) - r_n^4 F_n^2(\eta)) d\eta;$  (3.11.5)

$$f_1(\eta) = -W_{(\eta)}^* ;$$

$$f_2(\eta) = -X_{(\eta)} = - \sum_{m=1,2}^{\infty} E_m \sin \frac{2m-1}{2} \pi \eta ;$$

$$F_n(\eta) = \frac{1}{(a_n^2 - b_n^2)^2} \left[ (\cos b_n \eta - \cos a_n \eta) \left( C_n \frac{\sin a_n}{a_n} - D_n \frac{\sin b_n}{b_n} \right) + \left( \frac{\sin a_n \eta}{a_n} - \frac{\sin b_n \eta}{b_n} \right) (C_n \cos a_n - D_n \cos b_n) \right].$$

Таким образом, как и в примере 3.2.3, задача сводится к определению действительной функции  $X_{(\eta)}$ , при которой удовлетворялось бы равенство нулю угла поворота на краях  $\xi = 0$  и  $\xi = \lambda$ .

$$\varphi_x = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \left[ \int_0^1 f_1''(\eta)F_n''(\eta) d\eta - 2N_2 \int_0^1 f_1'(\eta)F_n'(\eta) d\eta - r_n^2 \sum_{m=1,2,3}^{\infty} E_m \psi_{nm} \right]. \quad (3.11.6)$$

$$\cdot \frac{r_n F_n(\eta) \operatorname{sh} r_n \lambda}{J_n} = 0,$$

где  $\psi_{nm} = \int_0^1 F_n(\eta) \sin \frac{2m-1}{2} \pi \eta d\eta.$

Умножим выражение (3.11.6) на  $\sin \frac{2k-1}{2} \pi \eta$  и проинтегрируем в промежутке  $0 \leq \eta \leq 1$ . Получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных  $E_m$ .

$$\sum_{m=1,2,3}^{\infty} E_m \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \frac{r_n^3 \operatorname{sh} r_n \lambda}{J_n} \psi_{nm} \psi_{nk} = \quad (3.11.7)$$

$$= \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{r_n \operatorname{sh} r_n \lambda}{J_n} \psi_{nk} \int_0^1 f_1''(\eta) F_n''(\eta) d\eta - \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{2N_2 r_n \operatorname{sh} r_n \lambda}{J_n} \psi_{nk} \int_0^1 f_1'(\eta) F_n'(\eta) d\eta.$$

Взяв конечное число членов ряда, присваивая индексам  $m$ ,  $n$ ,  $k$  соответствующие значения (1, 2, 3 и т.д.), получим конечную систему алгебраических уравнений.

Решая последовательно одно, два, три, четыре уравнения получим значения постоянных  $E_m$ :

$$\begin{aligned} E_1 &= -0.142674; \\ E_1 &= -0.143644; E_2 = 0.0241605; \\ E_1 &= -0.143543; E_2 = 0.0242438; E_3 = -0.00343; \\ E_1 &= -0.143635; E_2 = 0.0242644; E_3 = -0.003461; E_4 = -0.0001549. \end{aligned} \quad (3.11.8)$$

Относительно точности полученных значений можно сделать вывод, что увеличение порядка системы линейных уравнений не значительно влияет на величину постоянных  $E_m$  и с увеличением порядка системы необходимо увеличивать число членов ряда по « $n$ ».

Приняв исходные данные, указанные в п. 3.6, определим некоторые значения усилий и перемещений в характерных точках пластинки в зависимости от вариантов приложения продольных сил  $T_1$  и  $T_2$ .

Рассмотрим три комбинации загрузки пластинки находящуюся под действием поперечной нагрузки  $q(\eta, \xi)$  и:

- 1) сжатой в одном направлении силой  $T_1$ ;
- 2) сжатой в одном направлении силой  $T_2$ ;
- 3) сжатой в двух взаимно-перпендикулярных направлениях  $T_1$  и  $T_2$ .

Первый вариант – действует только продольная сила  $T_1$ .

В таблице 3.11.1 приведены значения прогиба  $W(\eta, \xi)$  и изгибающих моментов  $M_y(\eta, \xi)$  и  $M_x(\eta, \xi)$  в характерных точках пластинки, загруженной равномерно распределенной поперечной нагрузкой  $q(\eta, \xi)$  и сжатой в одном направлении силой  $T_1$ . Величина прогиба дана в метрах, изгибающего момента в

кН\*м.

Таблица 3.11.1 - Результаты расчета.

	$\eta$	$\xi$	$T_1=0.0T_{кр}$	$T_1=0.05T_{кр}$	$T_1=0.1T_{кр}$	$T_1=0.2T_{кр}$
$W$	0.5	0	$0.19 \cdot 10^{-4} \approx 0$	$0.21 \cdot 10^{-4} \approx 0$	$0.22 \cdot 10^{-4} \approx 0$	$0.20 \cdot 10^{-4} \approx 0$
	0	0.5	0	0	0	0
	0.5	0.5	$6.30 \cdot 10^{-3}$	$6.57 \cdot 10^{-3}$ (4.1%)	$6.90 \cdot 10^{-3}$ (4.8%)	$7.64 \cdot 10^{-3}$ (9.7%)
	1.0	0.5	$9.94 \cdot 10^{-3}$	$10.46 \cdot 10^{-3}$ (5.0%)	$11.09 \cdot 10^{-3}$ (5.7%)	$12.51 \cdot 10^{-3}$ (11.1%)
$M_y$	0	0.5	$-24.72 \cdot 10^3$	$-25.44 \cdot 10^3$ (2.8%)	$-26.29 \cdot 10^3$ (3.2%)	$-28.20 \cdot 10^3$ (6.8%)
	0.5	0.5	$7.97 \cdot 10^3$	$8.31 \cdot 10^3$ (4.1%)	$8.71 \cdot 10^3$ (4.6%)	$9.61 \cdot 10^3$ (6.8%)
	1.0	0.5	0	0	0	0
$M_x$	0.5	0	$-29.03 \cdot 10^3$	$-29.87 \cdot 10^3$ (2.8%)	$-30.87 \cdot 10^3$ (3.2%)	$-33.11 \cdot 10^3$ (6.9%)
	0.5	0.5	$15.00 \cdot 10^3$	$15.75 \cdot 10^3$ (4.2%)	$16.67 \cdot 10^3$ (5.5%)	$18.74 \cdot 10^3$ (11.1%)
	1.0	0.5	$20.38 \cdot 10^3$	$21.60 \cdot 10^3$ (5.6%)	$23.13 \cdot 10^3$ (6.6%)	$26.57 \cdot 10^3$ (13.1%)

Из приведенных результатов следует, что увеличение продольной силы в два раза при малых значениях ( $0.05T_{кр}-0.1T_{кр}$ ) приводит к изменению прогиба и изгибающего момента в пределах 4-6 % при большей величине продольной силы ( $0.1T_{кр}-0.2T_{кр}$ ) на 7-13%.

В таблице 3.11.2 приведены значения прогиба  $W(\eta, \xi)$  и изгибающих моментов  $M_y(\eta, \xi)$  и  $M_x(\eta, \xi)$  в характерных точках пластинки загруженной поперечной нагрузкой  $q(\eta, \xi)$  и сжатой в одном направлении силой  $T_2$ .

Таблица 3.11.2 - Результаты расчета.

	$\eta$	$\xi$	$T_2=0.0T_{кр}$	$T_2=0.05T_{кр}$	$T_2=0.1T_{кр}$	$T_2=0.2T_{кр}$
$W$	0.5	0	$0.14 \cdot 10^{-4} \approx 0$	$0.15 \cdot 10^{-4} \approx 0$	$0.12 \cdot 10^{-4} \approx 0$	$0.1 \cdot 10^{-4} \approx 0$
	0	0.5	0	0	0	0
	0.5	0.5	$6.30 \cdot 10^{-3}$	$6.32 \cdot 10^{-3}$ (0.4%)	$6.36 \cdot 10^{-3}$ (0.6%)	$6.42 \cdot 10^{-3}$ (0.9%)
	1.0	0.5	$9.94 \cdot 10^{-3}$	$10.20 \cdot 10^{-3}$ (2.5%)	$10.49 \cdot 10^{-3}$ (2.8%)	$11.15 \cdot 10^{-3}$ (5.9%)
$M_y$	0	0.5	$-24.72 \cdot 10^3$	$-24.87 \cdot 10^3$ (0.6%)	$-24.95 \cdot 10^3$ (0.4%)	$-25.30 \cdot 10^3$ (1.4%)
	0.5	0.5	$7.97 \cdot 10^3$	$7.91 \cdot 10^3$ (0.8%)	$7.81 \cdot 10^3$ (1.2%)	$7.57 \cdot 10^3$ (3.2%)
	1.0	0.5	0	0	0	0
$M_x$	0.5	0	$-29.03 \cdot 10^3$	$-29.09 \cdot 10^3$ (0.2%)	$-29.15$ (0.2)	$-29.23 \cdot 10^3$ (0.3%)
	0.5	0.5	$15.00 \cdot 10^3$	$15.13 \cdot 10^3$ (0.9%)	$15.20 \cdot 10^3$ (0.5%)	$15.32 \cdot 10^3$ (0.8%)
	1.0	0.5	$20.38 \cdot 10^3$	$20.90 \cdot 10^3$ (2.5%)	$21.55 \cdot 10^3$ (3.1%)	$22.96 \cdot 10^3$ (6.1%)

В таблице 3.11.3 приведены значения прогиба  $W(\eta, \xi)$  и изгибающих моментов  $M_y(\eta, \xi)$  и  $M_x(\eta, \xi)$  в характерных точках пластинки загруженной поперечной нагрузкой  $q(\eta, \xi)$  и сжатой в двух направлениях силами  $T_1$  и  $T_2$ .



Таблица 3.11.3 - Результаты расчета.

	$\eta$	$\xi$	$T_1=T_2=0.0T_{кр}$	$T_1=T_2=0.05T_{кр}$	$T_1=T_2=0.1T_{кр}$	$T_1=T_2=0.2T_{кр}$
$W$	0.5	0	$0.19 \cdot 10^{-4} \approx 0$	$0.16 \cdot 10^{-4} \approx 0$	$0.14 \cdot 10^{-4} \approx 0$	$0.16 \cdot 10^{-4} \approx 0$
	0	0.5	0	0	0	0
	0.5	0.5	$6.30 \cdot 10^{-3}$	$6.46 \cdot 10^{-3}$ (2.4%)	$6.65 \cdot 10^{-3}$ (2.9%)	$7.04 \cdot 10^{-3}$ (5.6%)
	1.0	0.5	$9.94 \cdot 10^{-3}$	$10.43 \cdot 10^{-3}$ (4.7%)	$10.95 \cdot 10^{-3}$ (5.1%)	$12.16 \cdot 10^{-3}$ (10.1%)
$M_y$	0	0.5	$-24.72 \cdot 10^3$	$-24.94 \cdot 10^3$ (0.9%)	$-25.29 \cdot 10^3$ (1.4%)	$-26.02 \cdot 10^3$ (2.9%)
	0.5	0.5	$7.97 \cdot 10^3$	$8.14 \cdot 10^3$ (2.1%)	$8.26 \cdot 10^3$ (1.9%)	$8.47 \cdot 10^3$ (2.5%)
	1.0	0.5	0	0	0	0
$M_x$	0.5	0	$-29.03 \cdot 10^3$	$-29.50 \cdot 10^3$ (1.4%)	$-30.02 \cdot 10^3$ (1.7%)	$-31.13 \cdot 10^3$ (3.6%)
	0.5	0.5	$15.00 \cdot 10^3$	$15.44 \cdot 10^3$ (2.4%)	$15.94 \cdot 10^3$ (3.1%)	$16.99 \cdot 10^3$ (6.4%)
	1.0	0.5	$20.88 \cdot 10^3$	$21.38 \cdot 10^3$ (2.3%)	$22.42 \cdot 10^3$ (4.5%)	$24.38 \cdot 10^3$ (8.4%)

При анализе результатов расчета изогнутых и сжато-изгибаемых пластин МНФ можно сделать следующие выводы:

1. Аналогично задачам устойчивости, решения при расчете изгибаемых и сжато изгибаемых пластин получается точно, когда на поперечных сторонах пластинки заданы значения прогиба  $W$  и изгибающий момент  $M_x$  или угол поворота  $\varphi_x$  и перерезывающая сила  $Q_x$  шарнирно оперты (примеры 3.2.1, 3.2.2), и решение получается приближенно, когда поперечные стороны пластинки жестко зашпелены или свободны (примеры 3.2.3, 3.2.4).

2. Алгоритм решения задач в рассмотренных примерах показал, что результаты обладают устойчивой монотонной сходимостью и быстро сходятся с увеличением числа членов ряда разложения собственных функций (достаточно 3-4 члена ряда).

3. Наличие продольных сжимающих сил существенно увеличивают внутренние усилия и прогиб, причем изменение параметров носит нелинейный характер.

Таким образом, был рассмотрен ряд задач актуальных с практической точки зрения. Решив их, мы можем точно, или практически точно исследовать особенности напряженно-деформируемого состояния тонких прямоугольных пластин с различными граничными условиями как при потере устойчивости, так и при работе на изгиб со сжатием.

## ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С РАЗЛИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ВДОЛЬ ОДНОЙ СТОРОНЫ.

### 4.1 Расчет сжато-изогнутой пластинки с различными граничными условиями вдоль одного края.

В качестве примера рассмотрим сжато-изогнутую пластинку со смешанными граничными условиями на продольных сторонах (рисунок 4.1.1). Как видно из рисунка 4.1.1 часть продольной стороны закреплена, другая же шарнирно оперта.

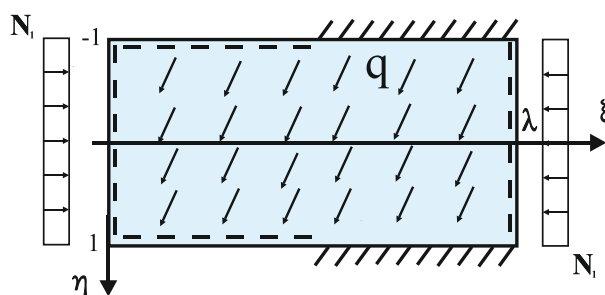


Рисунок 4.1.1 -- Расчетная схема.

Разобьем пластинку на две области таким образом, чтобы в пределах каждой из них, отнесенной к своей системе безразмерных координат, тип граничных условий не менялся, при этом функция прогиба описывается в каждой области своим аналитическим выражением (рисунок 4.1.2).

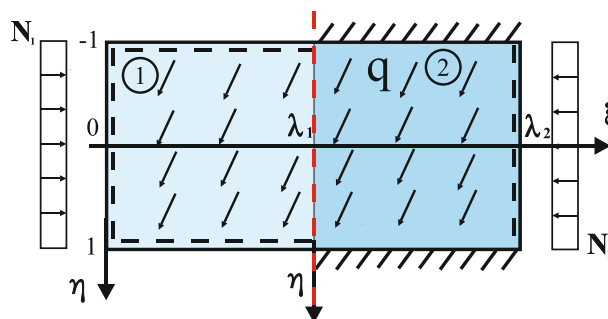


Рисунок 4.1.2 - Расчетная схема с делением на области.

Для каждой области было получено решение МНФ, удовлетворяющее дифференциальному уравнению сжато-изогнутой пластинки и граничным условиям на продольных сторонах.

Решаем задачу смешанным методом: врезаем шарнирно неподвижную опору

и прикладываем неизвестные - перемещение  $W = \frac{1}{h}Z(\eta)$  и распределенный изгибающий момент  $M_x = \frac{D}{h}X(\eta)$ , где  $Z(\eta)$  и  $X(\eta)$ , учитывая симметрию представим в виде бесконечного тригонометрического ряда с неизвестными коэффициентами:

$$Z(\eta) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \cos \frac{m\pi}{2} \eta; \tag{4.1.1}$$

$$X(\eta) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} D_m \cos \frac{m\pi}{2} \eta. \tag{4.1.2}$$

Эти функции удовлетворяют граничным условиям на крае  $\eta = \pm 1$ , а именно  $W = M_y = 0$ .

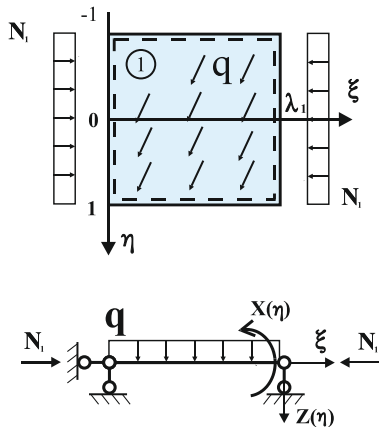


Рисунок 4.1.3 - Область I.

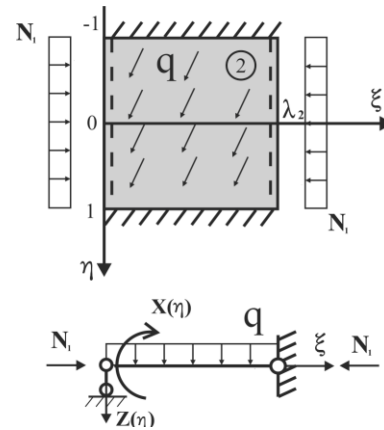


Рисунок 4.1.4 - Область II.

Для каждой области было получено решение, а именно:

Для первой области (рисунок 4.1.3):

$$W^I = h \left\{ W_{(\eta)}^{*I} + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^I sh r_n \xi + B_n^I ch r_n \xi) F_n^I(\eta) \right\}, \tag{4.1.3}$$

где  $W_{(\eta)}^{*I} = \frac{Ph}{24} (\eta^4 - 6\eta^2 + 5); \tag{4.1.4}$

$$F_n^I(\eta) = \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} (\cos a_n \cos b_n \eta - \cos b_n \cos a_n \eta), \tag{4.1.5}$$

где  $a_n = \sqrt{r_n^2 + \Delta_n}; b_n = \sqrt{r_n^2 - \Delta_n}; \Delta_n = \sqrt{-2r_n^2 N_1}$ .

Соответствующее характеристическое уравнение:

$$L_n^I = \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} \cos a_n \cos b_n = 0. \tag{4.1.6}$$

Для второй области (рисунок 4.1.4):

$$W^{II} = h \left\{ W_{(\eta)}^{*II} + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{II} sh r_n \xi + B_n^{II} ch r_n \xi) F_n^{II}(\eta) \right\}, \quad (4.1.7)$$

где 
$$W_{(\eta)}^{*II} = \frac{P}{24} (\eta^4 - 2\eta^2 + 1); \quad (4.1.8)$$

$$F_n^{II}(\eta) = \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} (b_n \sin b_n \cos a_n \eta - a_n \sin a_n \cos b_n \eta). \quad (4.1.9)$$

Соответствующее характеристическое уравнение:

$$L_n^{II} = \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} (b_n \sin b_n \cos a_n - a_n \sin a_n \cos b_n) = 0. \quad (4.1.10)$$

Коэффициенты  $A_n^I, B_n^I, A_n^{II}, B_n^{II}$ , входящие в решения  $W^I$  и  $W^{II}$ , могут быть определены с использованием соотношения обобщенной ортогональности (2.4.7) из граничных условий на поперечных сторонах каждой области.

Так, граничные условия на поперечных краях пластинки для I области левого края  $\xi^I = 0$  запишутся:

$$\xi^I = 0; \quad W^I = 0, \quad M_x^I = 0; \quad (4.1.11)$$

$$W^I(\eta, 0) = W_{(\eta)}^{*I} + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n^I F_n^I(\eta) = 0; \quad (4.1.12)$$

$$M_x^I(\eta, 0) = M_x^{*I}(\eta) + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n^I (r_n^2 F_n^I(\eta) + \nu F_n^{I''}(\eta)) = 0. \quad (4.1.13)$$

Тогда, воспользовавшись полученной во второй главе формулой (2.4.21) и положив  $X_{(\eta)}=0$  и  $Z_{(\eta)}=0$ , определим неизвестные коэффициенты  $B_n^I$ :

$$2Re B_n^I = \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 -W_{(\eta)}^{*I''} F_n^{I''}(\eta) d\eta, \quad (4.1.14)$$

где 
$$J_n = \int_{-1}^1 (F_n^{I''^2}(\eta) - r_n^4 F_n^{I^2}(\eta)) d\eta. \quad (4.1.15)$$

$W_{(\eta)}^{*I}$  - определяется по формуле (4.1.4), а  $F_n^I(\eta)$  - по (4.1.5).

Для I области правого края:  $\xi^I = \lambda^I$ ;

$$W^I = Z_{(\eta)};$$

$$M_x^I = X_{(\eta)};$$

$$W^I(\eta, \lambda^I) = W_{(\eta)}^{*I} + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^I sh r_n \lambda^I + B_n^I ch r_n \lambda^I) F_n^I(\eta) = Z_{(\eta)}; \quad (4.1.16)$$

$$M_x^I(\eta, \lambda^I) = M_x^{*I}(\eta) + \quad (4.1.17)$$

$$+ 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^I sh r_n \lambda^I + B_n^I ch r_n \lambda^I) (r_n^2 F_n^I(\eta) + \nu F_n^{I''}(\eta)) = X_{(\eta)}.$$

обозначим  $A_n^I sh r_n \lambda^I + B_n^I ch r_n \lambda^I = C_n^I$  в результате получим:

$$A_n^I = \frac{C_n^I - B_n^I ch r_n \lambda^I}{sh r_n \lambda^I};$$

$$2Re C_n^I = \frac{1}{J_n} \left\{ \int_{-1}^1 (Z_{(\eta)}'' - W_{(\eta)}^{*I''}) F_n^{I''}(\eta) d\eta + r_n^2 \int_{-1}^1 (X_{(\eta)} + \nu Z_{(\eta)}'') F_n^I(\eta) d\eta \right\}; \quad (4.1.18)$$

$$J_n = \int_{-1}^1 (F_n^{I''^2}(\eta) - r_n^4 F_n^{I^2}(\eta)) d\eta.$$

Для II области левого края  $\xi^{II} = 0$  запишем:

$$W^{II} = Z_{(\eta)}, \quad M_x^{II} = X_{(\eta)}.$$

$$W^{II}(\eta, 0) = W_{(\eta)}^{*II} + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{II} F_n^{II}(\eta) = Z_{(\eta)}; \quad (4.1.19)$$

$$M_x^{II}(\eta, 0) = M_x^{*II}(\eta) + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{II} (r_n^2 F_n^{II}(\eta) + \nu F_n^{II''}(\eta)) = X_{(\eta)}. \quad (4.1.20)$$

неизвестные коэффициенты  $B_n^{II}$ :

$$2Re B_n^{II} = \frac{1}{J_n} \left\{ \int_{-1}^1 (Z_{(\eta)}'' - W_{(\eta)}^{*II''}) F_n^{II''} d\eta + r_n^2 \int_{-1}^1 (X_{(\eta)} + \nu Z_{(\eta)}'') F_n^{II}(\eta) d\eta \right\}; \quad (4.1.21)$$

$$J_n = \int_{-1}^1 (F_n^{II''^2}(\eta) - r_n^4 F_n^{II^2}(\eta)) d\eta.$$

$W_{(\eta)}^{*II}$  - определяется по формуле (4.1.8), а  $F_n^{II}(\eta)$  - (4.1.9).

Для правого края  $\xi^{II} = \lambda^{II}$  запишем:

$$W^{II} = 0, \quad M_x^{II} = 0 \quad (4.1.22)$$

$$W^{II}(\eta, \lambda^{II}) = W_{(\eta)}^{*II} + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{II} sh r_n \lambda^{II} + B_n^{II} ch r_n \lambda^{II}) F_n^{II}(\eta) = 0;$$

$$M_x^{II}(\eta, \lambda^{II}) = M_x^{*II}(\eta) + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{II} sh r_n \lambda^{II} + B_n^{II} ch r_n \lambda^{II}) (r_n^2 F_n^{II}(\eta) + \nu F_n^{II''}(\eta)) = 0. \quad (4.1.23)$$

Обозначив  $A_n^{II} sh r_n \lambda^{II} + B_n^{II} ch r_n \lambda^{II} = C_n^{II}$  и положив  $X_{(\eta)}=0$  и  $Z_{(\eta)}=0$ , определим неизвестные коэффициенты  $C_n^{II}$ :

$$2Re C_n^{II} = \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 -W_{(\eta)}^{*II} F_n^{II''}(\eta) d\eta, \quad (4.1.24)$$

где 
$$J_n = \int_{-1}^1 \left( F_n^{II''^2}(\eta) - r_n^4 F_n^{II^2}(\eta) \right) d\eta. \quad (4.1.25)$$

$W_{(\eta)}^{*II}$  - определяется по формуле (4.1.8), а  $F_n^{II}(\eta)$  - (4.1.9).

В выражении (4.1.18) и (4.1.21) функции  $Z_{(\eta)}$  и  $X_{(\eta)}$  имеют неизвестные коэффициенты  $\mathbf{E}_m$  и  $\mathbf{D}_m$  для нахождения которых используем условия в сечении стыковки двух пластинок  $\xi^I = \lambda^I$  или  $\xi^{II} = 0$ .

$$\varphi_x^I(\eta, \lambda^I) = \varphi_x^{II}(\eta, 0); \quad (4.1.26)$$

$$Q_x^I(\eta, \lambda^I) = Q_x^{II}(\eta, 0). \quad (4.1.27)$$

Имея в виду, что

$$\varphi_x^I(\eta, \lambda^I) = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^I ch r_n \lambda^I - B_n^I}{sh r_n \lambda^I} r_n F_n^I(\eta); \quad (4.1.28)$$

$$\varphi_x^{II}(\eta, 0) = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{II} - B_n^{II} ch r_n \lambda^{II}}{sh r_n \lambda^{II}} r_n F_n^{II}(\eta) \quad (4.1.29)$$

$$Q_x^I(\eta, \lambda^I) = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^I ch r_n \lambda^I - B_n^I}{sh r_n \lambda^I} S_n^I(\eta); \quad (4.1.30)$$

$$(4.1.31)$$

$$Q_x^{II}(\eta, 0) = 2\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{II} - B_n^{II} \operatorname{ch} r_n \lambda^{II}}{\operatorname{sh} r_n \lambda^{II}} S_n^{II}(\eta),$$

где

$$S_n^I(\eta) = r_n^2 F_n^I(\eta) + (2 - \nu) F_n^{I''}(\eta); \quad (4.1.32)$$

$$S_n^{II}(\eta) = r_n^2 F_n^{II}(\eta) + (2 - \nu) F_n^{II''}(\eta). \quad (4.1.33)$$

Выражения (4.1.26) и (4.1.27) примут вид:

$$2\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^I \operatorname{ch} r_n \lambda^I - B_n^I}{\operatorname{sh} r_n \lambda^I} r_n F_n^I(\eta) - \frac{C_n^{II} - B_n^{II} \operatorname{ch} r_n \lambda^{II}}{\operatorname{sh} r_n \lambda^{II}} r_n F_n^{II}(\eta) = 0; \quad (4.1.34)$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^I \operatorname{ch} r_n \lambda^I - B_n^I}{\operatorname{sh} r_n \lambda^I} S_n^I(\eta) - \frac{C_n^{II} - B_n^{II} \operatorname{ch} r_n \lambda^{II}}{\operatorname{sh} r_n \lambda^{II}} S_n^{II}(\eta) = 0. \quad (4.1.35)$$

Значения этих коэффициентов определим из канонических уравнений, с помощью метода ортогонализации к полной системе функций, по которой раскладывали функции  $Z(\eta)$  и  $X(\eta)$  при выполнении условий (4.1.26) и (4.1.27).

Подставив в уравнение (4.1.26) формулы для нахождения  $B_n^I, C_n^I, B_n^{II}, C_n^{II}$ , получим:

$$\sum_{m=1,3}^{\infty} \mathbf{E}_m (K_{nm}^I F_n^I(\eta) - K_{nm}^{II} F_n^{II}(\eta)) - \mathbf{D}_m (M_{nm}^I F_n^I(\eta) - M_{nm}^{II} F_n^{II}(\eta)) - (N_{nm}^I F_n^I(\eta) - N_{nm}^{II} F_n^{II}(\eta)) = 0, \quad (4.1.36)$$

где

$$K_{nm}^i = \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{r_n}{J_n^i} \int_{-1}^1 (G_{nm}^i(\eta) F_n^{i''}(\eta) + \nu r_n^2 G_{nm}^i(\eta) F_n^i(\eta)) d\eta. \quad (4.1.37)$$

$$G_{nm}^i(\eta) = \frac{\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \operatorname{ch} r_n \lambda^i}{\operatorname{sh} r_n \lambda^i} \cos \frac{m\pi}{2} \eta; \quad (4.1.38)$$

$$M_{nm}^i = \frac{r_n^3}{J_n^i} \int_{-1}^1 \frac{G_{nm}^i(\eta) F_n^i(\eta)}{\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2} d\eta; \quad (4.1.39)$$

$$N_{nm}^i = \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{r_n}{J_n^i} \int_{-1}^1 W_{(\eta)}^{*II} F_n^{i''}(\eta) \frac{(\operatorname{sh} r_n \lambda^i - \operatorname{ch} r_n \lambda^i)}{\operatorname{sh} r_n \lambda^i} d\eta. \quad (4.1.40)$$

Индекс  $i$  обозначает номер рассчитываемой области на которые разбита пластинка.

Подставив в уравнение (4.1.27) формулы для нахождения  $B_n^I, C_n^I, B_n^{II}, C_n^{II}$ , получим:

$$\sum_{m=1,3}^{\infty} \mathbf{E}_m (K_{nm}^I S_n^I(\eta) - K_{nm}^{II} S_n^{II}(\eta)) + \mathbf{D}_m (M_{nm}^I S_n^I(\eta) - M_{nm}^{II} S_n^{II}(\eta)) - (N_{nm}^I S_n^I(\eta) - N_{nm}^{II} S_n^{II}(\eta)) = 0, \quad (4.1.41)$$

где  $S_n^i(\eta) = r_n^2 F_n^i(\eta) + (2 - \nu) F_n^{i''}(\eta)$ .

Значения коэффициентов  $\mathbf{E}_m$  и  $\mathbf{D}_m$ , входящих в уравнения (4.1.36) и (4.1.41), определим с помощью метода ортогонализации к полной системе тригонометрических функций  $\cos \frac{l\pi}{2} \eta$ , по которой раскладывали функции  $Z(\eta)$  и  $X(\eta)$ .

Умножим выражение (4.1.36) и (4.1.41) на  $\cos \frac{l\pi}{2} \eta$  и проинтегрируем в промежутке  $-1 \leq \eta \leq 1$ . Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных  $\mathbf{E}_m$  и  $\mathbf{D}_m$ .

Введя обозначения  $\psi_{nl}^i = \int_{-1}^1 F_n^i \cos \frac{l\pi}{2} \eta d\eta$  и

$$\theta_{nl}^i = r_n^2 \int_{-1}^1 F_n^i(\eta) \cos \frac{l\pi}{2} \eta d\eta + (2 - \nu) \int_{-1}^1 F_n^{i''}(\eta) \cos \frac{l\pi}{2} \eta d\eta$$

выражения (4.1.36) и (4.1.41) примут вид:

$$\begin{cases} \sum_{m=1,3}^{\infty} \mathbf{E}_m (K_{nm}^I \psi_{nl}^I - K_{nm}^{II} \psi_{nl}^{II}) - \mathbf{D}_m (M_{nm}^I \psi_{nl}^I - M_{nm}^{II} \psi_{nl}^{II}) = (N_{nm}^I \psi_{nl}^I - N_{nm}^{II} \psi_{nl}^{II}), \\ \sum_{m=1,3}^{\infty} \mathbf{E}_m (K_{nm}^I \theta_{nl}^I - K_{nm}^{II} \theta_{nl}^{II}) - \mathbf{D}_m (M_{nm}^I \theta_{nl}^I - M_{nm}^{II} \theta_{nl}^{II}) = (N_{nm}^I \theta_{nl}^I - N_{nm}^{II} \theta_{nl}^{II}), \end{cases} \quad (4.1.42)$$

Взяв конечное число членов ряда, присваивая индексу  $m, n, k$



соответствующие значения от 1, получим конечную систему алгебраических уравнений.

Приняв исходные данные, указанные в п. 3.6, для определения численных значений коэффициентов системы (4.1.42), приняв величину продольного сжимающего усилия  $T_1 = \frac{2N_1 D}{h^2} = 6.16031 \text{ МН/м.}$  и учитывая в суммах по "m", "n" и "l" выражений (4.1.42) только первые члены, т.е. решая задачу в первом приближении, получим:

$$\begin{cases} 0.75089 \mathbf{E}_1 + 0.13654 \mathbf{D}_1 = 0.01930 \\ 0.01953 \mathbf{E}_1 + 0.988306 \mathbf{D}_1 = 0.00151, \end{cases} \quad (4.1.43)$$

откуда  $\mathbf{E}_1 = 0.02549, \mathbf{D}_1 = 0.00115$ . Теперь по формулам (4.1.14), (4.1.18), (4.1.21), (4.1.24) могут быть вычислены все коэффициенты,  $B_n^I, C_n^I, B_n^{II}, C_n^{II}$ .

Таким образом, в решении задачи может быть учтено любое количество членов в суммах по "m", "n" и "l", а значит граничные условия на линии сопряжения двух областей можно удовлетворить с любой наперед заданной степенью точности.

Точность удовлетворения условий равенства угла поворота (4.1.26) и равенства поперечной перерезывающей силы (4.1.27) на линии сопряжения двух областей зависит от количества удерживаемых в суммах решения (2.3.53) членов ряда. Как видно из таб. 4.1.1, для практически точного выполнения условий на линии сопряжения нет необходимости учитывать число членов ряда больше чем 3. Так, при удержании двух и трех членов ряда по n, k, l и решении системы четырех и шести линейных уравнений величина угла поворота по сечению II-II на границе областей слева и справа имеет минимальную разницу (1.3%):

Таблица 4.1.1 - Результаты расчета.

	n=1	n=2	n=3
$\varphi_x^I(\eta, \lambda^I)$	0.021560	0.017231	0.016668
$\varphi_x^{II}(\eta, 0)$	0.011755	0.015953	0.016738
Погрешность	45,42%	7,4%	0,42%

Для снятия разрыва поперечной перерезывающей силы (условие 4.1.27)

необходимо удержать пять-шесть членов ряда (таблица 4.1.2).

Таблица 4.1.2 - Результаты расчета.

	n=4	n=5	n=6
$Q_x^I(\eta, \lambda^I)$ (Н)	42368	39147	38005
$Q_x^{II}(\eta, 0)$ (Н)	34589	36808	37820
Погрешность	19,8%	5,8%	0,5%

Как показали вычисления, в дальнейшем уточнении решения нет необходимости.

На рисунке 4.1.6 приведены данные вычислений и построены эпюры перемещений и внутренних усилий в характерных сечениях пластинки обозначенных на рисунке 4.1.5 римскими цифрами.

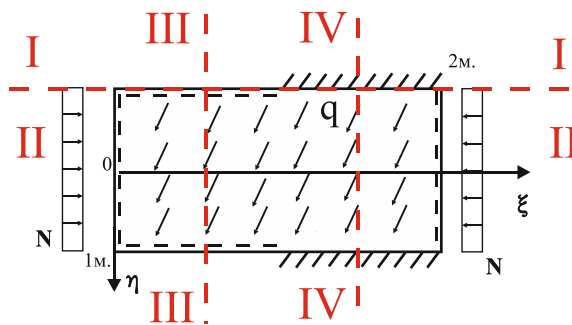
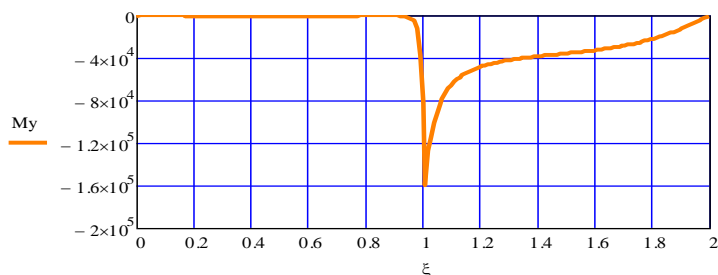


Рисунок 4.1.5 – Схема расположения сечений в которых вычислены усилия и перемещения.

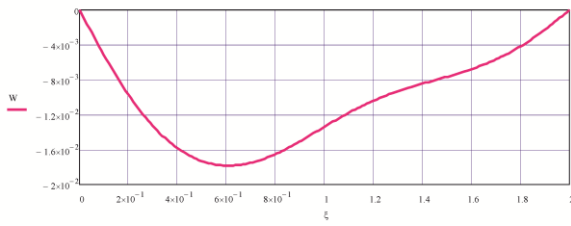
Сечение I-I

Изгибающий момент  $M_y$

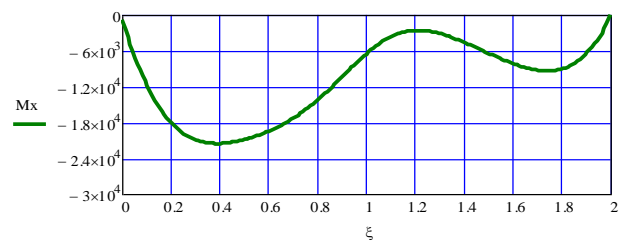


Сечение II-II;

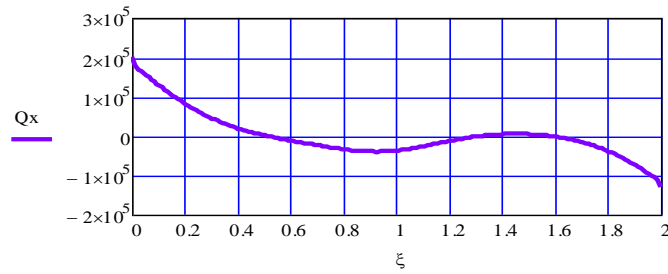
Прогиб  $W$



Изгибающий момент  $M_x$

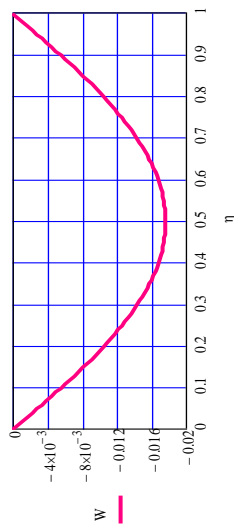


Поперечная сила  $Q_x$

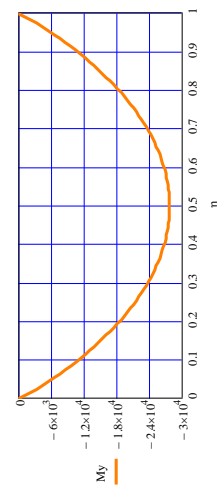


Сечение III-III;

Прогиб  $W$



Изгибающий момент  $M_y$



Сечение IV-IV;

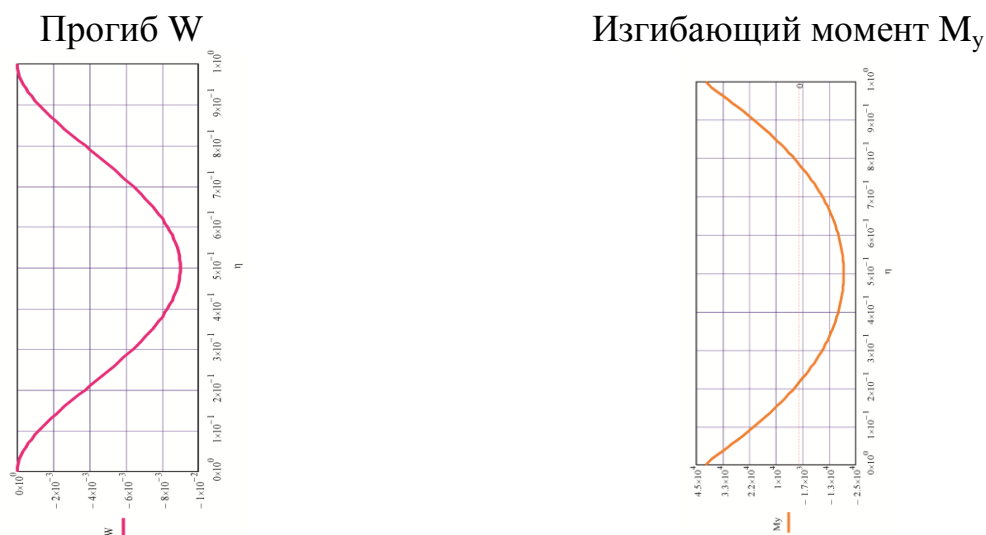


Рисунок 4.1.6 - Результаты расчета.

Полученное во второй главе соотношение обобщенной ортогональности однородных решений позволило в рассмотренном примере точно удовлетворить граничным условиям на поперечных сторонах пластинки. От порядка разрешающей системы линейных уравнений зависит точность удовлетворения граничного условия на смежных сторонах первой и второй области - равенство углов поворота и перерезывающей силы. Учет первых 2-3 членов ряда позволяет получить практически точные значения внутренних усилий и перемещений, пригодное для практических целей. Аналогично могут быть решены задачи, когда необходимо деление на большее число областей.

Выводы.

В качестве числового примера рассмотрена пластинка под действием равномерно-распределенной нагрузки и сжатой в одном направлении, часть длины продольных кромок которой закреплена, а оставшаяся - свободно оперта.

Предлагаемая методика позволяет построить аналитическое решение и получить числовые результаты для задачи расчета сжато-изгибаемой пластинки со смешанными граничными условиями, также учитывать особенности заданные вдоль линий, ортогональных к начальной: разрыв нагрузки, изменение цилиндрической жесткости наличие шарнирной или упругой связи отдельных частей пластинки и т.д.

## 4.2 Расчет на устойчивость сжатой в срединной плоскости пластинки,

имеющей различные граничные условия вдоль одного края.

В качестве примера рассмотрим задачу устойчивости сжатой пластинки с граничными условиями, рассмотренными в предыдущем параграфе рис 4.2.1.

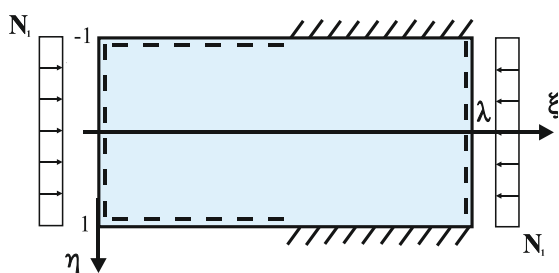


Рисунок 4.2.1 – Расчетная схема.

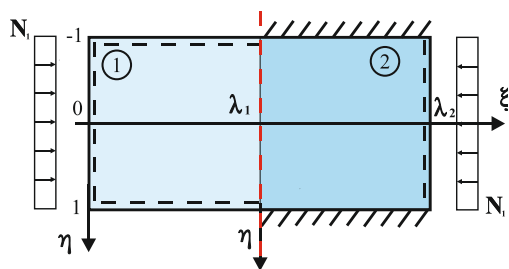


Рисунок 4.1.2 - Расчетная схема с делением на области.

Аналогично примеру 4.1 разобьем пластинку на области таким образом, чтобы в пределах каждой из них, отнесенной к своей системе безразмерных координат, тип граничных условий не менялся рис. 4.2.2. Решаем задачу смешанным методом, врезаем шарнирно неподвижную опору и прикладываем неизвестные перемещения  $W = \frac{1}{h} Z(\eta)$  и

распределенный изгибающий момент  $M_x = \frac{D}{h} X(\eta)$ , где  $Z(\eta)$  и  $X(\eta)$ ,

представим в виде бесконечного тригонометрического ряда с неизвестными коэффициентами:

$$Z(\eta) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} E_m \cos \frac{m\pi}{2} \eta; \quad (4.2.1)$$

$$X(\eta) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} D_m \cos \frac{m\pi}{2} \eta. \quad (4.2.2)$$

Общее решение для каждой области получается из решений предыдущего параграфа, если в них положить частные решения  $W_{(\eta)}^{*I}$  и  $W_{(\eta)}^{*II}$  равные нулю.

Формулы для нахождения коэффициентов  $A_n^I, B_n^I, A_n^{II}, B_n^{II}$ , как и канонические уравнения смешанного метода такие же (при  $W_{(\eta)}^{*I} = W_{(\eta)}^{*II} = 0$ ) только они однородные.

В канонические уравнения (4.1.6) и (4.1.10) входят неизвестное значение

критической силы  $N_I$  и бесконечное множество комплексных корней  $r_n$ . Поэтому, для нахождения величины критических сил, для которых существует изогнутая форма равновесия пластинки, необходимо получить дополнительное уравнение.

Дополнительные уравнения для нахождения критической силы  $N_I$  получим из удовлетворения граничных условий в сечении стыковки двух пластинок  $\xi^I = \lambda^I$  или  $\xi^{II} = 0$ :

$$\varphi_x^I(\eta, \lambda^I) = \varphi_x^{II}(\eta, 0); \quad (4.2.3)$$

$$Q_x^I(\eta, \lambda^I) = Q_x^{II}(\eta, 0). \quad (4.2.4)$$

Функции входящие в уравнения (4.2.3) и (4.2.4) имеют вид:

Имея в виду, что

$$\varphi_x^I(\eta, \lambda^I) = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n^I ch r_n \lambda^I r_n F_n^I(\eta); \quad (4.2.5)$$

$$\varphi_x^{II}(\eta, 0) = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-B_n^{II}}{sh r_n \lambda^{II}} r_n F_n^{II}(\eta) \quad (4.2.6)$$

и

$$Q_x^I(\eta, \lambda^I) = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n^I ch r_n \lambda^I \left( r_n^2 F_n^I(\eta) + (2 - \nu) F_n^{I''}(\eta) \right); \quad (4.2.7)$$

$$Q_x^{II}(\eta, 0) = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-B_n^{II}}{sh r_n \lambda^{II}} \left( r_n^2 F_n^{II}(\eta) + (2 - \nu) F_n^{II''}(\eta) \right). \quad (4.2.8)$$

Выражения (4.2.3) и (4.2.4) примут вид:

$$2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n^I ch r_n \lambda^I r_n F_n^I(\eta) + \frac{B_n^{II} r_n}{sh r_n \lambda^{II}} F_n^{II}(\eta) = 0; \quad (4.2.9)$$

$$2Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n^I ch r_n \lambda^I \left( r_n^2 F_n^I(\eta) + (2 - \nu) F_n^{I''}(\eta) \right) + \frac{B_n^{II}}{sh r_n \lambda^{II}} \left( r_n^2 F_n^{II}(\eta) + (2 - \nu) F_n^{II''}(\eta) \right). \quad (4.2.10)$$

Подставив выражения для  $A_n^I$ ,  $B_n^{II}$  в (4.2.9) и (4.2.10) получим:

$$\sum_{m=1,3}^{\infty} E_m \left( \frac{m\pi}{2} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{-1}^1 \left( -F_n^{I''}(\eta) - \nu r_n^2 F_n^I(\eta) \right) \frac{r_n ch r_n \lambda^I}{J_n^I} \cos \frac{m\pi}{2} \eta d\eta \cdot F_n^I(\eta) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-1}^1 \left( -F_n^{II''}(\eta) - \nu r_n^2 F_n^{II}(\eta) \right) \frac{r_n}{J_n^{II} \operatorname{sh} r_n \lambda^{II}} \cos \frac{m\pi}{2} \eta \, d\eta F_n^{II}(\eta) \Bigg] + \tag{4.2.11} \\
& + \sum_{m=1,3}^{\infty} \mathbf{D}_m \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{-1}^1 F_n^I(\eta) \frac{r_n^3 \operatorname{ch} r_n \lambda^I}{J_n^I} \cos \frac{m\pi}{2} \eta \, d\eta F_n^I(\eta) + \right. \\
& \quad \left. + \int_{-1}^1 F_n^{II}(\eta) \frac{r_n}{J_n^{II} \operatorname{sh} r_n \lambda^{II}} \cos \frac{m\pi}{2} \eta \, d\eta F_n^{II}(\eta) = 0; \right. \\
& \sum_{m=1,3}^{\infty} \mathbf{E}_m \left( \frac{m\pi}{2} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{-1}^1 \left( -F_n^{I''}(\eta) - \nu r_n^2 F_n^I(\eta) \right) \frac{r_n \operatorname{ch} r_n \lambda^I}{J_n^I} \cos \frac{m\pi}{2} \eta \, d\eta \cdot \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left( r_n^2 F_n^I(\eta) + (2 - \nu) F_n^{I''}(\eta) \right) + \\
& \left. + \int_{-1}^1 \left( -F_n^{II''}(\eta) - \nu r_n^2 F_n^{II}(\eta) \right) \frac{r_n \cos \frac{m\pi}{2} \eta}{J_n^{II} \operatorname{sh} r_n \lambda^{II}} \, d\eta \left( r_n^2 F_n^{II}(\eta) + (2 - \nu) F_n^{II''}(\eta) \right) \right] + \tag{4.2.12} \\
& + \sum_{m=1,3}^{\infty} \mathbf{D}_m \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{-1}^1 F_n^I(\eta) \frac{r_n^3 \operatorname{ch} r_n \lambda^I}{J_n^I} \cos \frac{m\pi}{2} \eta \, d\eta \left( r_n^2 F_n^I(\eta) + (2 - \nu) F_n^{I''}(\eta) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \int_{-1}^1 \frac{r_n F_n^{II}(\eta)}{J_n^{II} \operatorname{sh} r_n \lambda^{II}} \cos \frac{m\pi}{2} \eta \, d\eta \left( r_n^2 F_n^{II}(\eta) + (2 - \nu) F_n^{II''}(\eta) \right) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Воспользуемся свойством ортогональности тригонометрических функций, и умножим выражения (4.2.11) и (4.2.12) на  $\cos \left( \frac{k\pi}{2} \eta \right)$  и проинтегрируем по  $\eta$  в интервале от -1 до 1.

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \mathbf{E}_m \left( \frac{m\pi}{2} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{-1}^1 \left( -F_n^{I''}(\eta) - \nu r_n^2 F_n^I(\eta) \right) \frac{r_n \operatorname{ch} r_n \lambda^I}{J_n^I} \cos \frac{m\pi}{2} \eta \, d\eta \int_{-1}^1 F_n^I(\eta) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta + \right. \\
& \quad \left. + \int_{-1}^1 \left( -F_n^{II''}(\eta) - \nu r_n^2 F_n^{II}(\eta) \right) \frac{r_n \cos \frac{m\pi}{2} \eta}{J_n^{II} \operatorname{sh} r_n \lambda^{II}} \, d\eta \int_{-1}^1 F_n^{II}(\eta) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta \right] + \tag{4.2.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1,3,5}^{\infty} D_m \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{-1}^1 F_n^I(\eta) \frac{r_n^3 \operatorname{ch} r_n \lambda^I}{J_n^I} \cos \frac{m\pi}{2} \eta \, d\eta \int_{-1}^1 F_n^I(\eta) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta \right. \\
& \quad \left. + F_n^{II}(\eta) \frac{r_n \cos \frac{m\pi}{2} \eta}{J_n^{II} \operatorname{sh} r_n \lambda^{II}} \, d\eta \int_{-1}^1 F_n^{II}(\eta) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta \right] = 0; \\
& \sum_{m=1,3,}^{\infty} \int_{-1}^1 E_m \left( \frac{m\pi}{2} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{-1}^1 \left( -F_n^{I''}(\eta) - \nu r_n^2 F_n^I(\eta) \right) \frac{r_n \operatorname{ch} r_n \lambda^I}{J_n^I} \cos \frac{m\pi}{2} \eta \, d\eta \right. \\
& \quad \int_{-1}^1 \left( r_n^2 F_n^I(\eta) + (2 - \nu) F_n^{I''}(\eta) \right) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta + \\
& \quad + \int_{-1}^1 \left( -F_n^{II''}(\eta) - \nu r_n^2 F_n^{II}(\eta) \right) \frac{r_n \cos \frac{m\pi}{2} \eta}{J_n^{II} \operatorname{sh} r_n \lambda^{II}} \, d\eta \\
& \quad \left. \int_{-1}^1 \left( r_n^2 F_n^{II}(\eta) + (2 - \nu) F_n^{II''}(\eta) \right) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta \right] + \\
& \sum_{m=1,3,}^{\infty} \int_{-1}^1 D_m \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{-1}^1 F_n^I(\eta) \frac{r_n^3 \operatorname{ch} r_n \lambda^I}{J_n^I} \cos \frac{m\pi}{2} \eta \, d\eta \int_{-1}^1 \left( r_n^2 F_n^I(\eta) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (2 - \nu) F_n^{I''}(\eta) \right) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta + \right. \\
& \quad \left. + \int_{-1}^1 F_n^{II}(\eta) \frac{r_n \cos \frac{m\pi}{2} \eta}{J_n^{II} \operatorname{sh} r_n \lambda^{II}} \, d\eta \int_{-1}^1 \left( r_n^2 F_n^{II}(\eta) + (2 - \nu) F_n^{II''}(\eta) \right) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta \right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Введя обозначения:

$$\begin{aligned}
G_{n,k} = & \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \left( -F_n^{I''}(\eta) - \nu r_n^2 F_n^I(\eta) \right) \frac{r_n \operatorname{ch} r_n \lambda^I}{J_n^I} \cos \frac{m\pi}{2} \eta \, d\eta \int_{-1}^1 F_n^I(\eta) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta + \\
& + \int_{-1}^1 \left( -F_n^{II''}(\eta) - \nu r_n^2 F_n^{II}(\eta) \right) \frac{r_n \cos \frac{m\pi}{2} \eta}{J_n^{II} \operatorname{sh} r_n \lambda^{II}} \, d\eta \int_{-1}^1 F_n^{II}(\eta) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta;
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$



$$T_{n,k} = \sum_{n,k=1}^{\infty} \int_{-1}^1 F_n^I(\eta) \frac{r_n^3 \operatorname{ch} r_n \lambda^I}{J_n^I} \cos \frac{m\pi}{2} \eta \, d\eta \int_{-1}^1 F_n^I(\eta) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta$$

$$+ F_n^{II}(\eta) \frac{r_n \cos \frac{m\pi}{2} \eta}{J_n^{II} \operatorname{sh} r_n \lambda^{II}} \, d\eta \int_{-1}^1 F_n^{II}(\eta) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta;$$
(4.2.16)

$$U_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \left( -F_n^{I''}(\eta) - \nu r_n^2 F_n^I(\eta) \right) \frac{r_n \operatorname{ch} r_n \lambda^I}{J_n^I} \cos \frac{m\pi}{2} \eta \, d\eta \cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^1 \left( r_n^2 F_n^I(\eta) + (2 - \nu) F_n^{I''}(\eta) \right) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta +$$

$$+ \int_{-1}^1 \left( -F_n^{II''}(\eta) - \nu r_n^2 F_n^{II}(\eta) \right) \frac{r_n \cos \frac{m\pi}{2} \eta}{J_n^{II} \operatorname{sh} r_n \lambda^{II}} \, d\eta \cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^1 \left( r_n^2 F_n^{II}(\eta) + (2 - \nu) F_n^{II''}(\eta) \right) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta$$
(4.2.17)

$$E_{n,k} = \sum_{k,n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 F_n^I(\eta) \frac{r_n^3 \operatorname{ch} r_n \lambda^I}{J_n^I} \cos \frac{m\pi}{2} \eta \, d\eta \int_{-1}^1 \left( r_n^2 F_n^I(\eta) + (2 - \nu) F_n^{I''}(\eta) \right) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta +$$

$$+ \int_{-1}^1 F_n^{II}(\eta) \frac{r_n \cos \frac{m\pi}{2} \eta}{J_n^{II} \operatorname{sh} r_n \lambda^{II}} \, d\eta \int_{-1}^1 \left( r_n^2 F_n^{II}(\eta) + (2 - \nu) F_n^{II''}(\eta) \right) \cos \frac{k\pi}{2} \eta \, d\eta.$$
(4.2.18)

Выражения (4.2.13) и (4.2.14) примут более компактный вид:

$$\sum_{m=1,3,5}^{\infty} E_m \left( \frac{m\pi}{2} \right)^2 G_{n,k} + \sum_{m=1,3,5}^{\infty} D_m T_{n,k} = 0;$$

$$\sum_{m=1,3,5}^{\infty} E_m \left( \frac{m\pi}{2} \right)^2 U_{n,k} + \sum_{m=1,3,5}^{\infty} D_m E_{n,k} = 0.$$
(4.2.19)

Ограничившись конечным числом членов ряда разложения (4.2.13) и (4.2.14) по  $n$ ,  $m$ ,  $k$ , получим систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $E_m$  и  $D_m$ .

Например, для  $n=m=k=1$  выражение 4.2.19 примет вид:

$$\begin{aligned} E_1 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot G_{1,1} + D_1 \cdot T_{1,1} &= 0; \\ E_1 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot U_{1,1} + D_1 \cdot E_{1,1} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Поскольку неизвестные коэффициенты не могут быть равны нулю ( $E_m \neq 0$ ), ( $D_m \neq 0$ ), то, в первом приближении, должен быть равен нулю определитель системы уравнений (4.2.20):

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 G_{1,1} \cdot E_{1,1} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 T_{1,1} \cdot U_{1,1} = 0. \quad (4.2.21)$$

Таким образом, уравнение (4.2.21) является третьим уравнением, решая которое совместно с характеристическими (4.1.6) и (4.1.10) определим  $r_n^I$ ,  $r_n^{II}$ , и найдем искомый параметр критической сжимающей нагрузки  $N_I$ .

Для определения критической сжимающей нагрузки  $N_I$  используем исходные данные, указанные в п. 3.6.

Ряды, входящие в выражение (4.2.19), быстро сходятся, точность определения искомой критической силы зависит от порядка системы линейных уравнений (4.2.19).

Вычисления показали, что для определения критической сил достаточно три-четыре, члена ряда по  $n$ ,  $m$ ,  $k$  чтобы получить практически точное значение.

В таблице 4.2.1 приведены значения критической силы  $N_I$  для исследуемой пластинки в зависимости от числа членов ряда по  $n$ ,  $m$ ,  $k$ .

Таблица 4.2.1 - Результаты расчета.

Количество членов ряда по $n$ , $m$ , $k$ .	2	3	4
Величина критической силы $N_I$ .	4.66091*10 <sup>6</sup> Н/м.	5.99732*10 <sup>6</sup> Н/м.	6.10031*10 <sup>6</sup> Н/м.
Отличие в % от предыдущего.	-	22%	1.8%

Кроме того, необходимо отметить, что для определения критических нагрузок желательно брать одинаковое число членов ряда по  $n$ ,  $m$ ,  $k$ .

На рисунке 4.2.1 для полученного значения критического усилия  $N_1$  приведена форма потери устойчивости.

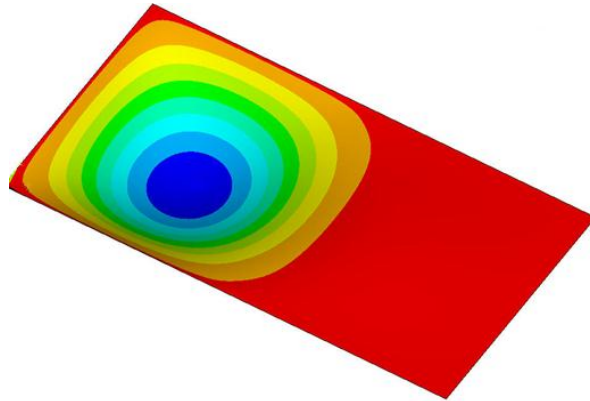


Рисунок 4.2.1 - Форма потери устойчивости.

Выводы.

Как показали вычисления, удержание трех-четырех членов ряда, дает практически точные значения критических нагрузок. При этом, для определения критической нагрузки желательно брать одинаковое число членов ряда по  $n$ ,  $m$ ,  $k$ .

Аналогично могут быть решены задачи, когда имеется деление на большее число областей изменения граничных условий по одной стороне пластинки.

## **ГЛАВА 5. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ МНФ С ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ANSYS MECHANICAL 14.5.**

Одной из задач, поставленных при выполнении данной работы, было сравнение результатов расчета прямоугольной сжатой пластинки, полученных аналитическим путем с расчетом выполненным численным методом.

Достоверность методики или верификация разработанных методов расчета математической модели, представленной МНФ, осуществлялась с помощью апробированного программного комплекса ANSYS Mechanical 14.5 (разработчик - Ingesibers.a.), представляющего собой работающий на платформе широко известного конечно-элементного комплекса Ansys.

Сравнение численного метода с аналитическими решениями в более простых и частных случаях позволяет дать оценку принятой в работе используемого метода, алгоритма и полученного решения.

В случае решения данной задачи методом конечных элементов для получения решения потребуется разбиение рассматриваемой области на элементы. Поскольку любое тело можно разбить на бесконечное количество элементов, возникает актуальный вопрос, какое число этих элементов будет оптимальным. Достаточный размер грани конечного элемента, позволяющий получить высокую степень совпадения численного и аналитического решения может быть установлен эмпирически.

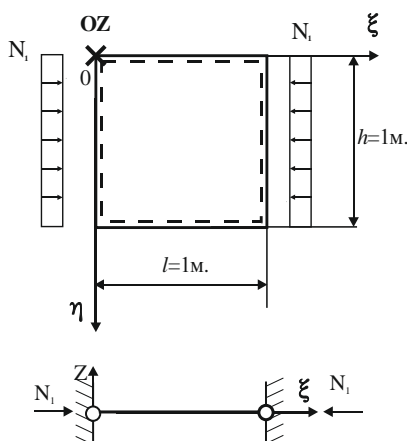
Для определения оптимального размера расчетной сетки рассмотрим результаты вычисления критической силы для пластинки с граничными условиями из примера 1. Программный комплекс ANSYS Mechanical состоит из модулей, каждый из которых является набором функций, выполняющих специфические действия при расчёте. Для решения нашей задачи мы используем такие модули как препроцессор (prep7), решение (solution) и постпроцессор для указанного момента времени (post1).

Наиболее простым способом использования комплекса является

использование системы меню, именуемой графическим интерфейсом пользователя (GUI). Так же возможно осуществлять расчёт с помощью команд, вводимых в окно ввода (InputWindow). Чтобы ввести сразу же несколько команд для их поочерёдного выполнения, нужно создать специальный файл формата `mac` и записать в нём нужные команды, а в окно ввода ввести только имя файла. Такой файл называется макрос. Использование макросов является очень удобным способом, т.к. для изменения параметров модели нужно только исправить соответствующие команды в макросе, а не проводить всю последовательность действий сначала. На практике, как правило, для решения задачи используют сразу несколько способов взаимодействия с программой. Так поступим и мы: создание модели в модуле `prep7` и решение задачи в модуле `solution` осуществим с помощью макроса, а просмотр результатов – с помощью графического интерфейса (GUI).

Для определения оптимального размера расчетной сетки рассмотрим результаты вычисления критической силы для пластинки с граничными условиями из примера 1.

Исходная модель пластинки имеет по контуру шарнирные опоры вдоль



осей  $Oz$  и дополнительные шарнирные опоры вдоль осей  $O\eta$ ,  $O\xi$ , то есть, перпендикулярных соответствующей стороне (рисунок 5.1). Искомая сжимающая критическая нагрузка  $N_1$  приложена к сторонам  $\xi = 0$ ,  $\xi = 1$ .

Рисунок 5.1 - Расчетная схема.

Для данной задачи мы составили расчётную схему. Для этого на двух смежных сторонах отбросим горизонтальную опору направленную вдоль

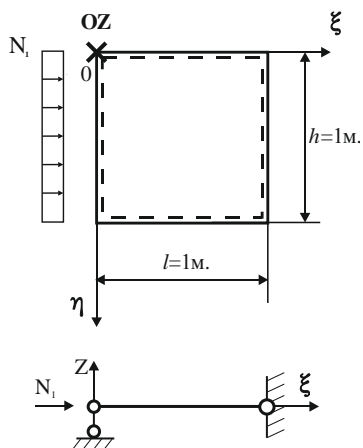


Рисунок 5.2 – Эквивалентная расчетная схема.

осей  $0\eta$  и  $0\xi$  соответственно. Таким образом, нагрузка будет приложена на взаимно перпендикулярных сторонах  $\eta = 0$ ,  $\xi = 0$  имеющих опоры только в направлении оси  $Oz$  (рисунок 5.2).

Такая модель является геометрически неизменяемой, но при этом эквивалентной исходной.

В качестве типа конечных элементов, на которые будем разбивать пластину, можно выбрать shell181 из библиотеки ANSYS Mechanical 14.5. Этот элемент хорошо подходит для расчёта моделей оболочек с малой или умеренной толщиной. Элемент имеет четыре узла и шесть степеней свободы в каждом узле. В качестве альтернативы можно выбрать тип конечного элемента Shell281, который отличается от Shell181 тем, что он является элементом второго порядка и, следовательно, имеет восемь узлов.

Всего было построено десять конечно-элементных моделей с различным шагом разбиения пластинки от  $1/2$  до  $1/4096$ . Задача решалась в линейной постановке, то есть перемещения и повороты малы, а модель материала – линейно-упругая. Так как в настоящей работе выполняется сравнение только напряжений, полученных по результатам аналитического и численного решений, параметры материала заданы произвольно. А именно, во всех примерах приняты исходные данные соответствующие разделу 3.2.

На рисунке 5.3 показан график зависимости критических сжимающих напряжений от шага разбиения на конечные элементы при использовании элемента Shell181.

На рисунке 5.4 показан график зависимости критических сжимающих напряжений от шага разбиения на конечные элементы при использовании элемента Shell281.

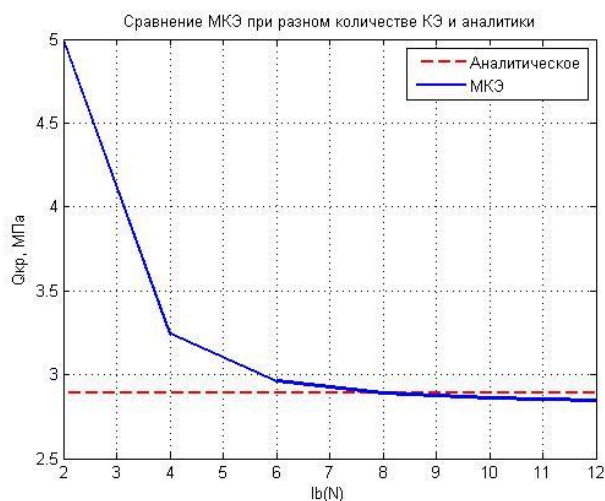


Рисунок 5.3 - При использовании 4-узлового элемента Shell181.

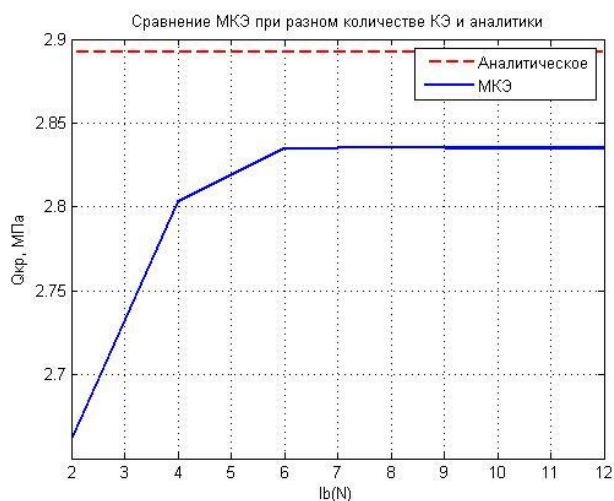


Рисунок 5.4 При использовании 8-узлового элемента Shell281.

Из анализа рисунка 5.3 видно, что критические напряжения полученные аналитическим путем (красная пунктирная линия) совпадают с результатами, полученными в программном комплексе ANSYS при шаге разбиения конечного элемента 1/256. При большем разбиении значение критического усилия уменьшалось.

При использовании 8-узлового элемента Shell281 величина критического напряжения также оказалась не намного ниже. Повидимому, некоторое отклонение от аналитического решения обусловлено, по всей видимости, тем, что оба конечных элемента (Shell181 и Shell281) учитывают деформации поперечного сдвига.

Сравнение значений критических напряжений действующих в срединной плоскости пластинки по результатам численного и аналитического решений в зависимости от сетки разбиения приведено в таблице 5.1.

Таблица. 5.1. Сравнение результатов аналитического и численных решений.

Размер сетки	Длина ребра конечного элемента, м	Напряжение вдоль продольной оси $\sigma_z$ , МПа		Погрешность, %
		Аналитическое решение	Численное решение	
1/4	0,25	2,892	5	$\frac{5 - 2.892}{2.8921} \cdot 100 = 73$
1/16	0,06255	2,892	3,25	$\frac{3,25 - 2.892}{2.8921} \cdot 100 = 12,$
1/64	0,0156	2,892	2,96	$\frac{2,96 - 2.892}{2.8921} \cdot 100 = 8$
1/256	0,0039	2,892	2,95	$\frac{2,95 - 2.892}{2.8921} \cdot 100 = 2,3$
1/1024	0,00037	2,892	2,85	$\frac{2,85 - 2.892}{2.8921} \cdot 100 = 1,4$
1/4096	0,000162	2,892	2,82	$\frac{2,82 - 2.892}{2.8921} \cdot 100 = 2,4$

Более подробное разрешение расчетной сетки в поперечном направлении OZ (элементы вблизи стенки имеют форму, близкую к правильной) позволило максимально приблизить расчетные значения к значениям, полученным МНФ.

Таким образом, путем вариации размеров конечных элементов достигнута высокая степень совпадения аналитических и численных решений. Установлен оптимальный размер конечного элемента для решения данных задач. Величины погрешностей в случае задания конечных элементов оптимального размера составили менее 1,4%. Для получения точного значения критического напряжения достаточно взять конечный элемент размером  $0.37 \cdot 10^{-3}$  м. Тогда количество конечных элементов равно 1024.

На рисунке 5.5 приведена конечно-элементная модель рассматриваемой пластинки.

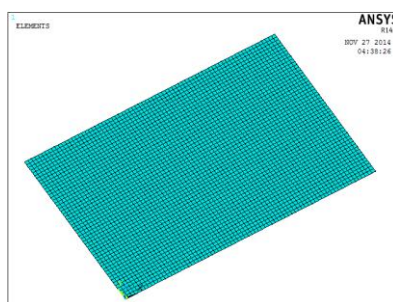


Рисунок 5.5 - Конечно-элементная модель пластины.

По разработанной методике, математической модели, проведены сравнительный анализ эффективности разработанного аналитического метода.



В задаче №1 рассматривалась прямоугольная пластинка шарнирно опертая по контуру. Продольная нагрузка приложена в одном направлении и в двух взаимно перпендикулярных. В таблице 5.2 величины критических сил решения задачи №1 с различным соотношением сторон сравниваются с численным решением. В первой строке приводится решение по МНФ, во второй – численное решение по ANSYS, в третьей – погрешность решения по МНФ относительно решения по ANSYS в скобках приведены имеющиеся результаты полученные методом начальных параметров.

Таблица 5.2 - Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
T <sub>1</sub> МПа	МНФ	9.0381	5.7844	6.2764	5.7844
	ANSYS	8.8945	5.7010	6.2002	5.7193
	Погрешность, %	1.1	1.3	1.1	1.1

В таблице 5.3 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в двух направлениях.

Таблица 5.3 - Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
T <sub>1</sub> и T <sub>2</sub> МПа	МНФ	7.2305	2.8922	2.0888	1.8076
	ANSYS	7.1183	2.8505	2.0674	1.7948
	Погрешность, %	1.6	1.3	1.2	0.9

В задаче №2 рассматривалась прямоугольная пластинка, в которой одна сторона свободна, а три оставшиеся оперты шарнирно (рисунок 3.2.1.)

В таблице 5.4 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в продольном направлении силой T<sub>1</sub>.

Таблица 5.4 - Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
T <sub>1</sub> МПа	МНФ	6.2988	2.0268	1.2404	0.9662
	ANSYS	6.2492	2.0069	1.2260	0.9542
	Погрешность, %	0.8	1.0	1.6	1.2

В таблице 5.5 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в поперечном направлении силой T<sub>2</sub>.

Таблица 5.5 - Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
Т <sub>2</sub> МПа	МНФ	13.3625	3.4211	1.4911	0.7385
	ANSYS	12.7143	3.3389	1.4671	0.7281
	Погрешность, %	4.1	2.3	2.0	2.0

В таблице 5.6 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в двух направлениях силой Т<sub>1</sub> и Т<sub>2</sub>.

Таблица 5.6 - Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
Т <sub>1</sub> и Т <sub>2</sub> МПа	МНФ	5.7409	1.5258	0.7247	0.4301
	ANSYS	5.6639	1.5065	0.7152	0.4244
	Погрешность, %	1.4	1.3	1.2	1.3

В задаче №3 рассматривалась прямоугольная пластинка, которая шарнирно опертая по двум сторонам, одна сторона свободна и одна сторона жестко закреплена (рисунок 3.3.1).

В таблице 5.7 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в продольном направлении силой Т<sub>1</sub>.

Таблица 5.7 - Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
Т <sub>1</sub> МПа	МНФ	6.4543	2.3896	1.8672	1.9319
	ANSYS	6.3953	2.3513	1.8396	1.9566
	Погрешность, %	0.9	1.2	1.1	1.0

В таблице 5.8 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в поперечном направлении силой Т<sub>2</sub>.

Таблица 5.8- Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
Т <sub>2</sub> МПа	МНФ	13.3643	3.4592	1.5542	0.9494
	ANSYS	12.7162	3.3886	1.5362	0.9373
	Погрешность, %	4.5	2.0	1.2	1.3

В таблице 5.9 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в двух направлениях силой Т<sub>1</sub> и Т<sub>2</sub>.

Таблица 5.9- Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
T <sub>1</sub> и T <sub>2</sub> МПа	МНФ	5.7963	1.6536	0.9129	0.6632
	ANSYS	5.5708	1.6208	0.8969	0.6584
	Погрешность, %	3.9	1.8	1.7	0.7

В задаче №4 рассматривалась прямоугольная пластинка, которая шарнирно опертая по двум сторонам и по двум жестко закреплена (рисунок 3.4.1).

В таблице 5.10 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в продольном направлении силой T<sub>1</sub>.

Таблица 5.10- Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
T <sub>1</sub> МПа	МНФ	11.1223	11.1223	10.2903	12.4428
	ANSYS	10.2325	11.0280	11.3975	12.3504
	Погрешность, %	8.0	1.8	9.6	0.7

В таблице 5.11 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в поперечном направлении силой T<sub>2</sub>.

Таблица 5.11- Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
T <sub>2</sub> МПа	МНФ	28.0377	9.7512	7.2836	6.5751
	ANSYS	27.1440	9.2680	6.8263	6.1836
	Погрешность, %	3.1	5.0	6.2	5.9

В таблице 5.12 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в двух направлениях силой T<sub>1</sub> и T<sub>2</sub>.

Таблица 5.12- Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
T <sub>1</sub> и T <sub>2</sub> МПа	МНФ	8.5669	5.5384	5.4482	5.5310
	ANSYS	8.4476	5.8362	6.0226	6.0839
	Погрешность, %	1.4	5.1	9.0	9.0

В задаче №5 рассматривалась прямоугольная пластинка, которая шарнирно оперта по двум сторонам и две стороны свободны (рисунок 3.5.1).

В таблице 5.13 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в продольном направлении силой T<sub>1</sub>.

Таблица 5.13 - Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
T <sub>1</sub> МПа	МНФ	5.6291	1.3771	0.6027	1.3771
	ANSYS	5.6104	1.3749	0.6022	0.3356
	Погрешность, %	0.3	0.14	2.0	0.08

В таблице 5.14 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в поперечном направлении силой T<sub>2</sub>.

Таблица 5.14 - Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
T <sub>2</sub> МПа	МНФ	13.0766	2.9542	1.1025	0.5719
	ANSYS	12.4462	2.8812	1.0803	0.5617
	Погрешность, %	4.8	2.3	1.8	1.7

В таблице 5.15 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в двух направлениях силой T<sub>1</sub> и T<sub>2</sub>.

Таблица 5.15 - Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
T <sub>1</sub> и T <sub>2</sub> МПа	МНФ	5.5095	1.3480	0.5929	0.3318
	ANSYS	5.4682	1.3440	0.5920	0.3315
	Погрешность, %	0.1	0.03	0.01	0.01

В задаче №6 рассматривалась прямоугольная пластинка, которая жестко закреплена по трем сторонам и одна сторона свободна (рисунок 3.6.1).

В таблице 5.16 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в продольном направлении силой T<sub>1</sub>.

Таблица 5.16 - Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
T <sub>1</sub> МПа	МНФ	23.9313	7.0516	4.4931	3.632
	ANSYS	23.6943	7.0256	4.4121	3.4832
	Погрешность, %	1.2	0.4	1.0	4.3

В таблице 5.17 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в поперечном направлении силой T<sub>2</sub>.

Таблица 5.17 - Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
Т <sub>2</sub> МПа	МНФ	18.7223	4.9289	2.3910	1.3748
	ANSYS	18.4297	4.8129	2.2940	1.3428
	Погрешность, %	1.3	1.4	1.0	1.5

В таблице 5.18 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в двух направлениях силой Т<sub>1</sub> и Т<sub>2</sub>.

Таблица 5.18 - Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
Т <sub>1</sub> и Т <sub>2</sub> МПа	МНФ	14.2944	3.6577	1.7220	1.1331
	ANSYS	13.9213	3.5427	1.6700	1.0940
	Погрешность, %	1.3	3.0	2.9	3.5

В задаче №7 рассматривалась прямоугольная пластинка, которая шарнирно оперта по двум взаимно перпендикулярным сторонам, две стороны свободны (рисунок 3.7.1).

В таблице 5.19 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в продольном направлении силой Т<sub>1</sub>.

Таблица 5.19 - Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
Т <sub>1</sub> МПа	МНФ	0.5453	0.5822	0.5900	0.6043
	ANSYS	0.5261	0.5603	0.5750	0.5824
	Погрешность, %	3.5	3.4	2.5	3.5

В таблице 5.20 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в поперечном направлении силой Т<sub>2</sub>.

Таблица 5.20 - Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
Т <sub>2</sub> МПа	МНФ	2.3233	0.5901	0.2513	0.1402
	ANSYS	2.2975	0.5603	0.2483	0.1374
	Погрешность, %	1.3	3.4	1.2	2.1

В таблице 5.21 приведены величины критических сил для пластинки сжатой в двух направлениях силой Т<sub>1</sub> и Т<sub>2</sub>.

Таблица 5.21 - Результаты расчета.

Размеры пластинки в плане в метрах.		0.5x1.0	1.0x1.0	1.5x1.0	2.0x1.0
T <sub>1</sub> и T <sub>2</sub> МПа	МНФ	0.4426	0.2933	0.1838	0.1185
	ANSYS	0.4346	0.2893	0.1787	0.1151
	Погрешность, %	1.8	1.4	2.3	2.8

### ВЫВОДЫ:

1. Решение перечисленных верификационных задач указывает на правильность решения задач линейной теории упругости методом начальных функций и позволяет корректно выполнять расчет.

2. Форма потери устойчивости, полученная аналитическим и численным методом, полностью совпадает.

3. Результаты расчетов в рассматриваемых примерах, выполненных предложенным аналитическим методом и результаты, полученные в программном комплексе ANSYS, практически совпадают друг с другом. Величины погрешности составили менее 5%.

4. Из полученных данных определен оптимальный размер конечного элемента для решения поставленных задач (количество конечных элементов равно 1024), что позволило достигнуть высокой степени совпадения решений.

5. Разработанная методика по результатам верификации с проведенным расчетом численным методом на программном комплексе ANSYS является адекватной, что говорит о возможности дальнейшего применения результатов этой методики при проведении исследований.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получена новая форма обобщенной ортогональности позволяющая решать задачи с различными граничными условиями не только на продольных, но и поперечных сторонах прямоугольной пластинки сжатой и сжато-изогнутой пластинки. Построен алгоритм решения плоской задачи теории упругости при действии равномерно сжимающих нагрузок и при совместном действии поперечной и продольных сил. Разработанный алгоритм реализован в системе компьютерной алгебры, из класса систем автоматизированного проектирования - MathCAD.

Результаты вычислений обладают высокой точностью, но немного меньше, чем результаты полученные с использованием универсальной программной системы конечно-элементного анализа ANSYS MECHANICAL 14.5.

По материалам изложенной в диссертационной работе могут быть сделаны следующие выводы:

1. Полученная форма свойства обобщенной ортогональности позволяет с высокой степенью точности определить основные параметры напряженно-деформированного состояния для случаев когда решение может быть получено точно и когда решение определяется приближенно.

2. Предложенный алгоритм решения обладает быстрой, монотонной сходимостью.

3. Рассмотренные в работе примеры показали, что предложенная методика решения задач МНФ обладает несомненным преимуществом по сравнению с другими аналитическими методами благодаря тому, что при вычислении общего решения дифференциального уравнения в виде ряда достаточно взять 3-4 члена ряда по  $n$  чтобы получить практически точный результат.

4. Развитие метода начальных функций существенно дополняет существующие аналитические методы, позволяя оценить точность численных методов расчета.

5. Материалы диссертационной работы в виде таблиц, графики с изолиниями,

текст макросов могут быть использованы при проектировании строительных конструкций



**Список литературы.**

1. Агарев В.А. Метод начальных функций в технической теории изгиба прямоугольных пластинок.- ДАН УССР, 1959, № 11, с.1206-1210.
2. Агарев В.А. О некоторых применениях метода начальных функций.- ДАН УССР, 1959, № 12, с.1306-1312.
3. Агарев В. А., Венцель Н.О., Чорный М.М. К точному решению задачи об изгибе пластин в полярных координатах.- ПМ, 1961, т.7, № 5, с.521-529.
4. Агарев В.А. Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. - Киев: АН УССР, 1963, с.203.
5. Александров В.М., Зеренцов В.Б. Динамические задачи об изгибе прямоугольной пластины со смешанными условиями закрепления по контуру.- ПММ, 1979, т. 43, № 1, с. 116-123.
6. Аксентян О.К., Зорович И.И. Напряженное состояние плиты малой толщины.- ПММ, 1963, т.27, № 6, с.1057-1074.
7. Аксентян О.К., Ворович И.И. Об определении концентрации напряжений на основе прикладной теории.- ПММ, 1964, т.26, № 3, с.589-596.
8. Бабаджанян В.Г., Галиныш А.К., Саченков А.В. К методу начальных функций В.З.Власова.- ПМ, 1976, т.II, № I, с.15-21.
9. Бабаджанян В.Г., Галиныш А.К. Применение символического метода интегрирования к трехмерным уравнениям динамики трансверсально-изотропной плиты.- ПМ, 1967, т.12, № 9, с.24-29.
10. Барг Я.А., Лившиц А.Л., Лившиц В.Л. К решению задачи о балке-стенке с жёстко закреплёнными краями // Строительная механика и расчёт сооружений. 1968. №5. С. 21-23.
11. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 447 с.

12. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
13. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1987. 264 с.
14. Бовин В.А. Дискретный вариант плоской теории упругости // Исследования по теории сооружений. М.: Стройиздат, 1980. В. 24. С. 121-128.
15. Борисов М.В., Вахитов М.Б. О решении некоторых задач теории упругости с помощью интегрирующих матриц // Тр. КАИ. Казань, 1974. В. 166. С. 32-39.
16. Ванюшенков М.Г. Применение метода начальных функций к расчету прямоугольных плит на упругом основании.- Труды МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1968, -№ 53, с. 68-85.
17. Ванюшенков М.Г. Расчет тонких упругих пластин методом начальных функций. - М.: ШСИ им. В.В. Куйбышева, 1965, с. 47.
18. Ванюшенков М.Г. Расчет неразрезных пластинок методом начальных функций.- Труды МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1973, №- 112, с. 19-25.
19. Ванюшенков М.Г. Соотношение обобщенной ортогональности Папковича- Гринбурга для сжато-изогнутых пластинок. Межвузовский научно-методический сборник трудов МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1987, с. 21-30.
20. Ванюшенков М.Г., Кузнецов С.Ф. Решение задачи изгиба прямоугольной пластинки со смешанными граничными условиями методом начальных функций.- Издание ВНИИС, 1981,- вып. 7, № 2632.
21. Ванюшенков М.Г., Ушаков А.Ю. Соотношение обобщенной ортогональности и их использование при расчете сжато-изогнутых пластинок методом начальных функций // Строительная механика и расчет сооружений. 2006.- №6. С.12-17.

22. Ванюшенков М.Г., Ушаков А.Ю. Определение критических сжимающих нагрузок упругих тонких пластинок методом начальных функций // Промышленное и гражданское строительство. 2010. №11. С.71-73.

23. Власов В.В. Метод начальных функций в плоской задаче теории упругости.- Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1958, № 2,- с. 97-111.

24. Власов В.В. Метод начальных функций в задачах равновесия толстых многослойных плит.- Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1958, № 7, - с. 40-48.

25. Власов В.В. Применение метода начальных функций к плоской задаче теории упругости для прямоугольной области .- Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1959, -№ 3,- с. 114-125.

26. Власов В.В. Применение метода начальных функций к некоторым задачам изгиба прямоугольных пластинок,- Инженерный сборник 1960,- т. 30,- с. 78-84.

27. Власов В.В. Применение метода начальных функций к расчету толстых плит.- В кн.: Исследования по теории сооружений, М., Стройиздат, 1961,- вып. 10, -с. 189-207.

28. Власов В.В. Метод начальных функций в осесимметричной задаче теории упругости.- Сб. трудов МИСИ, 1963,- № 34, -с. 31-45.

29. Власов В.В. Метод начальных функций в плоской задаче теории упругости.- В кн.: Вопросы прочности и устойчивости элементов тонкостенных конструкций.- М., Оборонгиз, 1963,- № I,- с. 5-58.

30. Власов В.В. Об основных задачах теории упругости.- В кн. Прочность и устойчивость элементов тонкостенных конструкций.- М., Машиностроение, 1967,- № 2,-с. 248-312.

31. Власов В.В. Применение метода начальных функций к расчету пластин, подкрепленных ребрами жесткости.- В кн.: Расчеты на прочность. -М., Машиностроение, 1967, вып. 14, -с. 137-174.

32. Власов В.В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики.- М.: Стройиздат, 1975,- с. 224.
33. Власов В.З. Метод начальных *функций* в задачах теории упругости.- Изв. АН СССР, ОТН, 1955, -№ 7.
34. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании.- **М.:** Физматгиз, 1960,- с. 355-432.
35. Волков А.Н. Некоторые теоретические проблемы расчета многослойных толстых цилиндрических и сферических оболочек.- Проектирование металлических конструкций. -Инф.- реф. сб., сер. 7, вып. 7 /27/, 1970, -с. 23-33.
36. Волков А.Н. Теория толстых оболочек на основе метода начальных функций.- ПМ, 1971-, т.7, вып. 10.
37. Волков А.Н. Применение метода начальных функций. В.З.Власова к построению теории толстых сферических оболочек.- Проектирование металлических конструкций.- Инф. реф. сб. Сер. 7, вып. 10 /30/, 1971, -с. 12-18.
38. Волков А.Н. Расчет толстостенных полых цилиндров.- М.: УДН им. П.Лумумбы, 1972,- с. 32.
39. Волков А.Н. Статика толстых оболочек: Автореф. докт. дис-М., УДН им. П.Лумумбы, 1974.- 32 с.
40. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек.- Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. 1964 г., М., 1966, вып. 3, - с. 116-136.
41. Ворович И.И., Малкина О.С. Напряженное состояние плиты малой толщины.- ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
42. Ворович И.И., Ковальчук В.Е. О базисных свойствах одной системы однородных решений.- ПММ, 1967, т. 31, вып. 5, - с. 861-869.

43. Ворович И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек.- В кн.: Материалы I Всесоюзной школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. - Тбилиси, 1975, -с. 51-151.

44. Ворович И.И., Кадомцев И.Г., Устинов Ю.А. К теории неоднородных по толщине плит.- Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3.

45. Горячевский О.А., Ушаков А.Ю. Исследование устойчивости прямоугольных пластин с использованием программного комплекса ANSYS Mechanical 14.5 пластинки // Научное обозрение. 2015. №8. С.51-55.

46. Герман Д.Я., Прокопов В.К. Изгиб равномерной нагрузкой секториальных пластин с заделанной дуговой кромкой.- Инженерный сборник, 1955, т.- 21,- с. 120-127.

47. Габбасов Р.Ф. О расчёте на устойчивость составных пластин по теории А.Р. Ржаницына // Юбилейный сборник докладов, посвящается 100-летию со дня рождения В.З. Власова и 85-летию кафедры Строительная механика. М., 2006. С. 31-36.

48. Глаголевский В.Б., Нулер Б.М. Кручение конечных упруги цилиндров спаянных с круглыми пластинами или цилиндрическими оболочками.- ПММ, 1977,- т. 41, в. 3, -с. 493-500.

49. Гохбаум Ф.А. Приближенный расчет сопряжений толстых цилиндрических оболочек и пластин.- В кн.: Теория оболочек и пластин, Ереван, АН Арм. ССР, 1964, -с. 339-406.

50. Гохбаум Ф.А. Применение метода начальных функций к расчету толстостенных и сплошных цилиндров,- В кн.: Применение железобетона в машиностроении. М., Машгиз, 1964,- с. 81-265.

51. Гринберг Г.А. О методе, предложенном П.Ф. Папковичем решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба для прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными

кромками, и о некоторых его обобщениях.- ПММ, 1953, -т. IN<sup>2</sup>, - с. 211-218.

52. Гринберг Г.А., Поплавский Р.П. Об изгибе полукруглой тонкой плиты с закрепленным дуговым краем и свободным диаметром Инженерный сборник, 1954, -т. 18, -с. 83-88.

53. Гринберг Г.А., Покровский А.Н., Уфлянд Я.С. О характере напряженного состояния упругой тонкой клиновидной плиты с закрепленной и свободной сторонами.- Инженерный сборник, 1955, т. с. 193-198.

54. Груздев Ю.А., Прокопов В.К. Полимоментная теория равновесия толстых плит.- ГММ, 1968, - т. 32, в. 2, - с. 345-352.

55. Груздев Ю.А., Прокопов В.К. К задаче изгиба толстой плиты.- ПМ, 1970, т. 6, в. 5, - с. 3-9.

56. Гуревич С.Г. Решение плоской задачи для прямоугольной области, нагруженной по краям нормальными усилиями, и применение ее к расчету фланцевых соединений.- В кн.: Прочность элементов паровых турбин. М. Машгиз, 1951, - с. 125-170.

57. Гуревич С.Г. Распределение напряжений в прямоугольной пластинке, произвольно нагруженной по краям.- Изв. Ленинградского электротехнического института, 1955, - № 27, - с. 77-122.

58. Гуревич С.Г. К решению смешанной задачи для прямоугольной пластинки.- Изв. Ленинградского электротехнического института, 1958, -№ 35, -с. 239-25.

59. Денисоз М.Г. Приложение вариационного метода разделения переменных к расчету пластин с дискретными граничными условиями. - Канд. дисс, М., 1978, - 146 с.

60. Джанелидзе Г.И., Прокопов В.К. Метод однородных решений в математической теории упругости.- Труды 4 Всесоюзного математического съезда. Т. 2. Л., -Наука, 1964, -с. 551-557.

61. Журавская О.А. Однородные решения в теории изгиба ортотропных пластин,- Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1971, № 5, -с. 70-77.

62. Журавская О.А. Соотношение обобщенной ортогональности в задачах изгиба ортотропных прямоугольных пластин с направленным краем.- Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1975, №4, -с.43.

63. Журавская О.А., Наумова Н.И. Однородные решения в задачах изгиба ортотропной пластины.- Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1976,- № 4, -с. 48-51.

64. Захаревич А.Ф. Изгиб однородного слоя под действием собственного веса.- Записки Горного института, 1956, -т.33, №3, -с. 62-89.

65. Зильберглейт А.С, Нулер Б.М. Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости.- ДАН СССР, 1977-т. 234, № 2,- с. 333.

66. Китовер К.А. Изгиб тонких прямоугольных плит. - В кн.: Расчет пространственных конструкций. М., Госстройиздат, 1951, -№ 2, -с. 441-479.

67. Китовер К.А. Об использовании специальных систем бигармонических функций для решения некоторых задач теории упругости. -ПШ, 1952, -т. 16, в. 6, -с. 739-748.

68. Китовер К.А. Изгиб высоких балок.- Инженерный сборник, 1953, т. 14, с. 199-203.

69. Космодамианский А.С, Мысовский Ю.Б. Напряженное состояние толстой пластинки с двумя круговыми отверстиями.- В сб. Механика твердого тела.- Рес. межвед. сб., Киев, -Наукова думка, 1969, -в. I,- с. 200-216:

70. Костарев А.В., Прокопов В.К. Применение символического метода к выводу уравнений плоской задачи теории упругости в полярных координатах.- ПМ, 1970, т. 6, в. 1, с. 69-76.

71. Костарев А.В., Прокопов В.К. Соотношение расширенной ортогональности для некоторых задач теории упругости.- ПМ, 1970, т. 34, в. 5, с. 945-952.

72. Костарев А.В. Определение температурных напряжений в полосе символическим методом по дискретно заданному температурному полю.- В сб.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, Киев, Наукова думка, 1970,- в. 10,- с. 297-300.

73. Круг Е.М. К теории изгиба толстых круглых плит.- Учен, зап. Черновицкого ун-та, 1955,- т. 12,- с. 25-43.

74. Круг Е.М. Об одном символическом решении уравнений теории упругости.- Научный ежегодник за 1959 г. Черновицкого ун-та, из-во Львовского ун-та, 1960, -с. 537-543.

75. Лебедев Д.Ф., Нулер Б.М. Круглая плита переменной толщины на упругом полупространстве.- Изв. АН СССР, МГТ, 1976,- № 5, - с. 39-46.

76. Леонтьев Н.Н. Применение метода начальных функций к определению температурных напряжений в толстых плитах.- Сб. трудов МИСИ, 1963, - № 34, - с. 46-57.

77. Лехницкий С.Г. К теории анизотропных толстых плит.- Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1959, - № 2, - с. 142-145.

78. Лехницкий С.Г. Осесимметричная деформация и кручение трансверсально изотропного цилиндра под действием полиномиальной нагрузки.- ПММ, 1961,- т. 25, в. 6, - с. 1102-1109.

79. Лехницкий С.Г. Упругое равновесие трансверсально изотропного слоя и толстой плиты.- ПММ, 1962,- т. 26, в. 4,- с. 686-696.



80. Лащеников Б.Я. К вопросу о решении дифференциального уравнения устойчивости сжатой пластины переменного сечения с помощью интегральной матрицы // Тр. МИИТ. М, 1963. В. 164. с. 36-41.

81. Лившиц П.З. О распределении контактного давления по посадочной длине вращающегося диска / втулки/. - Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 9, - с. 66-73.

82. Лившиц П.З. О распределении контактного давления при посадке с натягом диска на коротки вал со свободными концами. - Труды ЯШ, № 4, Л., Гостехиздат, 1958, - с. 115-122.

83. Литовченко С.И., Прокопов В.К. Соотношение обобщенной ортогональности в задаче о равновесии упругого цилиндра, - ПММ, 1973, - т. 37, в. 2, - с. 285-290.

84. Лурье А.И. К задаче о равновесии пластины переменной толщины. - Труды ЛИИ, 1936, - в.1, № 6, с. 57-80.

85. Лурье А.И. К теории толстых плит. - ПММ, 1942, - т. 6, № 2-3, с. 151-168.

86. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. - М.: ГИТТЛ, 1955, - с. 491.

87. Матросов А.В. Замкнутая форма операторов метода начальных функций для пространственной задачи теории упругости / А. В. Матросов, Г. Н. Ширунов // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. - СПб.: Изд. дом СПбГУ, 2013. — с. 256-262.

88. Матросов А.В. Алгоритмы получения замкнутых форм операторов метода начальных функций для пространственных задач теории упругости / А. В. Матросов, Г. Н. Ширунов // Вестник гражданских инженеров. - 2014. - № 1 (42). - с. 136-144.

89. Матросов А.В. Математическое моделирование линейно-упругих систем сложной конфигурации. Диссертации на соискание ученой степени доктора

физико-математических наук Специальность 05.13.18 Санкт-Петербург 2012.

90 Малиев А.С. О выборе функций в общих решениях задачи равновесия изотропного упругого тела // Сб. науч. тр. / Ленингр. элек-тротехн. ин-т инж. жел.-дор. транспорта. 1952. Вып. 4 с. 180-244.

91. Нигул У.К. О применении символического метода А.И Лурье к анализу напряженных состояний и двумерных теорий упругих плит.- ПММ, 1963, -т. 27, № 3,- с. 583-588.

92. Нигул У.К. О применении символического метода А.И.Лурье в трехмерной теории динамики плит.- Изв. АН Эст. ССР, сер. физ-мат. наук, 1963,- № 2,- с. 146-155.

93. Нулер Б.М. Кручение упругого пространства, ослабленного полубесконечной конической щелью.- Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 1.

94. Нулер Б.М. Некоторые контактные задачи для упругого бесконечного клина.- ГШ, 1972, -т. 36, в. 1. с. 157-163.

95. Нулер Б.М. О сжатии упругого слоя балочными плитами. ГШ, 1973, т. 37, в. 2 , с. 364-372.

96. Нулер Б.М. Контактные задачи для полос и прямоугольных пластин, усиленных стержнями.- ПММ, 1975,- т. 39, в. 3. с. 306-316.

97. Нулер Б.М. О деформации упругой клиновидной пластинки подкрепленной стержнем переменной жесткости и об одном методе решения смешанных задач.- ПММ, 1976,- т. 40, в. 2. с. 559-664.

98. Нулер Б.М. О соотношении обобщенной ортогональности П.А.Шигффа.- ПММ, 1969.,- т. 33, вып. 2, с. 376-383.

99. Нулер Б.М. Деформация упругого клина подкрепленного балкой.- ГШ, 1974, т. 38, в. 5. с. 876-888.

100. Нулер Б.М. Контактные задачи для полос и прямоугольных пластин, усиленных стержнями.- ПММ, 1975,- т. 39, в. 3. с. 306-316.

101. Нулер Б.М. О деформации упругой клиновидной пластинки подкрепленной стержнем переменной жесткости и об одном методе решения смешанных задач.- ПММ, 1976,- т. 40, в. 2. с. 559-664.

102. Нулер Б.М. Метод кусочно-однородных решений в смешанных задачах теории упругости: Автореф. докт. дис- Л., ВНИИГ им. Веденеева, 1973, 23. С.

103. Никифоров С.Н. Теория упругости и пластичности. М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1955. 86 С.

104. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Издательство МГУ, 1969. 695 с.

105. Очинский В.В., Денисов М.Г., Кузнецов С.Ф. К вопросу о применении метода сил в расчете прямоугольных пластин.- Труды Тюменского ун-та и ТкмИСИ, 1977, в. 2, с. 65-69.

106. Папкович П.Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы.- ДАН СССР, 1940, т. 27, № 4, с. 359-374.

107. Папкович П.Ф. Два вопроса теории изгиба тонких упругих плит.- ПММ, 1941, - т. 5, в. 3, с. 335-339.

108. Подстригач Я.С, Столяров В.А. Матрично-операторный метод в теории упругости.- ДАН УССР, сер. А, 1973, № 11, с.1021-1024.

109. Прокопов В.К. Об одной плоской задаче теории упругости для прямоугольной области.- ПММ, 1952, т. 16, в. I, с. 45-56.

110. Прокопов В.К. Однородные решения теории упругости и их приложение к теории тонких пластинок.- Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, 1964, в.3, М., Наука, 1966, с. 253-259.

111. Прокопов В.К. О соотношении обобщенной ортогональности П.Ф.Папковича для прямоугольной пластинки.- ПММ, 1964, т.28, в.2, с. 351-355.

112. Прокопов В.К. О соотношениях обобщенной ортогональности имеющих приложения в теории упругости.- Труды Симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа, 1973, т.1, Тбилиси, с. 206-213.

113. Прокопов В.К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям.- Труды ЛПИ, № 279, 1967, - с. 31-46.

114. Прокопов В.К. Задача о стесненном изгибе прямоугольной полосы.- Инженерный сборник, 1952, т. II, с. 151-160.

115. Прокопов В.К., Бабешко М.Е., Стрюк В.К. Применение однородных решений к осесимметричной задаче термоупругости для цилиндров конечной длины.- ПМ, 1977, т.13, в.12, с. 3-8.

116. Пановко Я.Г. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1985. 287 С.

117. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчётные модели сооружений и возможность их анализа. М.: ДМК Пресс, 2007. 600.

118. Плотников Ф.А. Решение плоской задачи теории упругости со смешанными граничными условиями // Строительная механика и расчёт сооружений. 1975. №1. с. 15-18.

119. Райзер В.Д. Матрично-операторный метод расчета пологих оболочек,- В сб.: Новые методы расчета строительных конструкций, М., Стройиздат, 1970.

120. Райзер В.Д. Расчет пологих оболочек с непрямоугольным планом.- В сб.: Практические методы расчета оболочек и складок покрытий, М., Стройиздат, 1970.

121. Райзер В.Д. Расчет безмоментных оболочек с полигональным планом.- В сб.: Строительные конструкции, в. 8, Теория и методы расчета, Труды ЦНИИСК им. Кучеренко, 1970.

122. Райзер В.Д. Расчет покрытий и оболочек отрицательной кривизны.- Строительная механика и расчет сооружений, 1970, № 4.

123. Райзер В.Д. Метод начальных функций в задачах расчета пространственных конструкций покрытий.- Автореф. дис. док. тех. наук.- М., 1971, 27 с.

124. Рекач В.Г. Один из случаев контактной задачи теории упругости для плоского бруса кругового очертания.- Изв. вузов, Строительство и архитектура, 1958, № 2, с. 76-80.

125. Рекач В.Г. Применение краевых однородных решений к расчету треугольных плотин,- Труды УДН им. П.Лумумбы, 1965.

126. Романов А.А. К расчету прямоугольных пластинок со сложными граничными условиями.- Труды МИИТ, 1971, в. 364, с. 94-104.

127. Силкин Е.И., Соловьева Н.А. Применение метода начальных функций к расчету толстых плит.- Изв. АН СССР, ОТИ, 1958, № 12, с. 141-143.

128. Смирнов В.А. Расчет пластин сложного очертания.- М.: Стройиздат, 1978,- 300 с.

129. Столяров В.А. Применение матрично-операторного метода к решению осесимметричной задачи теории упругости для цилиндрического слоя.- ПМ, 1976, т. 12, в. 6.

130. Столяров В.А. Матрично-операторный метод в задаче теории упругости для бесконечного слоя.- ПМ, 1976, т. 12, в.5, 37 С..

131. Терегулов И.Г. Круглая упругая плита при осесимметричном поперечном нагружении. – ПММ, 1961, т.25, в.5, с. 927-936.

132. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М., Л.: Гостех-издат, 1946. 532 с.

133. Тимошенко С.П. Устойчивость пластин, стержней и оболочек. М: Наука, 1971, 808 с.

134. Травкин Ю.И. Об одной системе парных интегральных уравнений с тригонометрическими ядрами.- ПМ, 1978, т. 14, №8, с.102-109. 138.

135.Травкин Ю.И. О системе парных тригонометрических рядов и ее применении к смешанным задачам теории упругости.- ПМ, 1977, т.13, № 6, с. 27-37.

136. Уманский Э.С., Квитка А.Й., Агарев В.А. Метод начальных функций в осесимметричной задаче теории упругости.- ДАН УССР, 1958, № 11, с. 1167-1171.

137. Уманский Э.С., Агарев В.А. К методу начальных функций в плоской задаче теории упругости.- ДАН УССР, 1960, № 6, с.755-760.

138. Устинов Ю.А., Юдович В.И. О полноте элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе.- ПММ, 1973, т.37, вып. 4 с. 706-714.

139.Устинов.Н.А. Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит. ДАН СССР, 1974, т. 216, №4.

140. Устинов.Н.А. О полноте системы однородных решений теории плит. ПММ 1976, т. 40, в. 3, с. 536-543.

141. Ушаков А.Ю. Расчет тонких упругих пластинок на устойчивость методом начальных функций // Сборник докладов традиционной научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава института строительства и архитектуры. МГСУ, М., 2010.

142. Ушаков А.Ю., Ванюшенков М.Г Исследование влияния действия продольных сжимающих усилий на напряженно – деформированное состояние изогнутой прямоугольной пластинки // Научно-технический вестник Поволжья. 2012. №6. с.409-413.

143. Ушаков А.Ю. Ванюшенков М.Г., Изгиб прямоугольной пластинки при действии продольных сжимающих сил // Промышленное и гражданское строительство. 2013. №10. с.72-73.

144. Ушаков А.Ю. Работа изогнутой прямоугольной пластинки при действии продольных сжимающих усилий // Международная научная конференция «Интеграция, партнерство и инновации в строительной науке и образовании» МГСУ, М., 2013.

145. Ушаков А.Ю. Расчет тонких упругих пластинок при действии продольных сжимающих сил на устойчивость методом начальных функций // Промышленное и гражданское строительство. 2014. №10. С.55-57.
146. Ширунов Г. Н. Анализ напряженно–деформированного состояния упругого слоя под действием локальной нагрузки методом начальных функций / Г. Н. Ширунов // Вестник гражданских инженеров. -2014. - № 5(46). с. 58-67.
147. Antes H.G. Splinefunktionen bei der Plattenberechnung mittels Spannungsfunktionen // Wiss. Zeitsch. der Hochsch. für Arch, und Bauw. Weimar, 1975. Heft 2. S. p. 135-138.
148. Brandt K. Derivation of geometry stiffue matrix for finite elements hybrid displacement models // Int. J. solid und struct. 1978. V. 14. №1. p. 53-66.
149. Brahtz J.H.A. The stress function and photoelasticity applied to dams. Proc. of the American Soc. of civil eng. 1935 , v. 61, №7, p. 983-1020.
150. Dougall J., An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate. Trans. R. Soc. Edinburgh 41 (1904) p. 129–228.
151. Fadle J. Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe. Dr. Diss. Techn. Hochschule, Berlin 1940.
152. Filon L.N.G., On the expansion of polynomials in series of functions, Proc. London Math. Soc. (ser.2) 4 (1907) p. 396–430.
153. Schiff P.A. *Sur l'équilibre d'un cylinder élastique*. Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, t. 9 (1883), p. 407-424.
154. Tölcke F. Wasserkraftanlagen // Handbibliothek für Bauingenieur. Berlin : 1938. p. 358-408.