Общие критерии оценивания

По результатам проверки каждого задания выставляется одна из следующих оценок (перечислены в порядке убывания):
«+» — задача решена полностью;
«±» — задача решена с недочетами, не влияющими на общий ход решения (например, допущена арифметическая ошибка в конце правильного решения);
«∓» — задача не решена, но имеются содержательные продвижения (например, задача решена для содержательного частного случая);
«−» — задача не решена;
за задачу, к решению которой участник не приступал, ставится оценка «0».

При выборе оценки главную роль играет наличие всех ключевых идей решения, а не несущественные погрешности и мелкие арифметические ошибки. Ключевая граница проходит между знаками «±»и «∓»: при проверке необходимо решить, является ли задача в целом решенной (пусть и с погрешностями), или в целом решенной задачу признать нельзя. При подведении итогов учитывается только количество в целом решенных задач — задач, за которые поставлена оценка «+»или «±».

Пожалуйста, отмечайте ошибки и неверные переходы красной ручкой. Но не исправляйте их — ни у кого при просмотре результата (даже в виде черно-белого скана) не должно оставаться сомнений, какую часть текста написал участник, а какую — проверяющий. Оставляя комментарий, учитывайте, что его увидит автор работы.

Оценки по задачам ставятся в таблицу на первой странице. Ставить оценки *внутри* работы нежелательно — они еще могут поменяться после второй проверки.

Комментарии по отдельным задачам

Задача 3. Проверка корректности условия от участников не требуется. В частности, в варианте 3 засчитывается также ответ 5184 ($= 72^2$).

Вариант I

Задача 1. Сумма первых тринадцати членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх относится к сумме всех членов без последних трёх как 4 : 3. Найти количество членов этой прогрессии.

Ответ: 20.

Решение. Обозначим через a первый член арифметической прогрессии, через d — ее разность, через n — количество членов. Тогда, сумма первых тринадцати ее членов будет равна $\frac{13\cdot(a+(a+12d))}{2}$, последних тринадцати — $\frac{13\cdot(a+(n-13)d+a+(n-1)d)}{2}$, всех без первых трех — $\frac{(n-3)\cdot(a+3d+a+(n-1)d)}{2}$, всех без последних трех — $\frac{(n-3)\cdot(a+a+(n-4)d)}{2}$. Из условия тогда имеем систему:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\cdot 13(a+6d) & = & 13(a+(n-7)d) \\ 3\cdot(n-3)\cdot(2a+(n+2)d) & = & 4\cdot(n-3)\cdot(2a+(n-4)d) \end{array}\right.,$$

или, после преобразований,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & (n-19)d \\ -2a & = & (n-22)d \end{array}\right.$$

Умножая первое равенство на 2 и прибавляя ко второму, получаем $(3n-60)d=0$. Поскольку $d\neq 0$ (так как иначе сумма всех членов без первых трех, равнялась бы сумме всех членов без последних трех), получаем $n=20$.

Задача 2. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди — среднего, а лжецы — низшего. A, B и C – жители этого острова. Один из них — рыцарь, другой — лжец, а третий — обычный человек. A и B сказали следующее. A: «B по рангу выше, чем C.» B: «C по рангу выше, чем A.» Что ответил C на вопрос: «Кто выше по рангу — A или B?»

Ответ: B.

Решение. Переберем варианты, кем может являться житель A.

Если A рыцарь, то B — обычный человек, а C — лжец и C ответит: “B”. Если A лжец, то C рыцарь, а B — обычный человек, и C также ответит: “B”. Наконец, если A — обычный человек, то B не может быть ни рыцарем (иначе C тоже был бы рыцарем, а это невозможно), ни обычным человеком, значит он лжец, но тогда C тоже лжец, что невозможно. Значит, A не может быть обычным человеком.

Таким образом, C всегда ответит: “B”.

Задача 3. Четырехзначное число X не кратно 10. Сумма числа X и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равна N. Оказалось, что число N делится на 100. Найдите N.

Ответ: 11000.

Решение. Пусть $X=\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$, $Y=\overline{dcba}=1000d+100c+10b+a$, при этом a, b, c, d — цифры и $a\neq 0$.

По условию $X+Y$ делится на 100, т.е. $1001(a+d)+110(b+c)\ \vdots\ 100$.

Имеем $1001(a+d)\ \vdots\ 10$, т.е. $a+d\ \vdots\ 10$, откуда, поскольку a и d — цифры и $a\neq 0$, $1\leq a+d\leq 18$, значит $a+d=10$. Далее, $1001\cdot 10+110(b+c)\ \vdots\ 100$, т.е. $b+c+1\ \vdots\ 10$, откуда, поскольку b и c — цифры, $1\leq b+c+1\leq 19$, значит $b+c=9$.

Таким образом, $N=X+Y=1001\cdot 10+110\cdot 9=11000$.

Задача 4. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 65 и 31 соответственно, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Ответ: 2015.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Из подобия треугольников AOB и COD следует, что $\overrightarrow{OC} = \frac{31}{65}\overrightarrow{AO}$, а $\overrightarrow{OD} = \frac{31}{65}\overrightarrow{BO}$.

Обозначим вектор $\overrightarrow{AO}$ через $\vec{a}$, а вектор $\overrightarrow{BO}$ через $\vec{b}$. Тогда, из условия следует, что $(\vec{a},\vec{b}) = 0$ и

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \vec{a} + \frac{31}{65}\vec{b}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{b} + \frac{31}{65}\vec{a}.$$

Откуда

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = \left(\vec{a} + \frac{31}{65}\vec{b}, \vec{b} + \frac{31}{65}\vec{a}\right) = \frac{31}{65}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) + (\ldots)\cdot(\vec{a},\vec{b}) = \frac{31}{65}|AB|^2 = 2015,$$

где предпоследнее равенство следует из того, что треугольник AOB — прямоугольный.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 26x^2 + 42xy + 17y^2 = 10; \\ 10x^2 + 18xy + \ \ 8y^2 = 6. \end{cases}$$

Ответ: $(-1, 2)$, $(-11, 14)$, $(11, -14)$, $(1, -2)$.

Решение. Складывая и вычитая два уравнения системы, получаем, что исходная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} (6x+5y)^2 &= 16 \\ (4x+3y)^2 &= 4 \end{cases}$$

Откуда получаем 4 возможных случая

$$\begin{cases} 6x+5y &= 4 \\ 4x+3y &= 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x+5y &= 4 \\ 4x+3y &= -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x+5y &= -4 \\ 4x+3y &= 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x+5y &= -4 \\ 4x+3y &= -2 \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем, находим 4 ответа: $(-1, 2)$, $(-11, 14)$, $(11, -14)$, $(1, -2)$.

Задача 6. Для $x = \frac{\pi}{2n}$ найдите значение суммы

$$\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) + \ldots + \cos^2(nx)$$

Ответ: $\frac{n-1}{2}$.

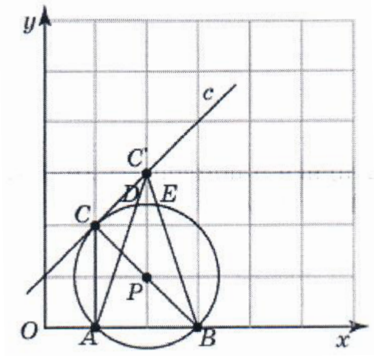
Решение. Заметим, что

$$\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \cos^2\left(\frac{(n-k)\pi}{2n}\right) = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n}\right) = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = 1.$$

Если n нечетно, то это позволяет все слагаемые, кроме $\cos^2(nx)$ разбить на такие пары, что сумма чисел в паре равна 1. Отсюда разбитые на пары слагаемые дают сумму $\frac{n-1}{2}$, а $\cos^2(nx) = \cos^2(\frac{\pi}{2}) = 0$. Если же n четно, то без пары остаются и $\cos^2(nx) = \cos^2(\frac{\pi}{2}) = 0$, и $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. И в том, и в другом случае полная сумма равна $\frac{n-1}{2}$.

Задача 7. Прямая c задается уравнением $y = x+1$. Точки A и B имеют координаты $A(1;0)$ и $B(3;0)$. На прямой c найдите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Ответ: $(1;2)$.

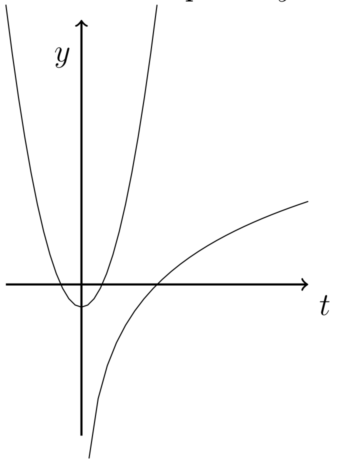


Решение. Искомой точкой является точка $C(1;2)$. Действительно, рассмотрим окружность с центром в точке $P(2;1)$ и радиусом $PA = PB$. Она касается прямой c в точке C. Угол ACB равен половине дуги AB. Для любой точки C' прямой c, отличной от точки C, угол $AC'B$ равен полуразности дуг AB и DE (см. рис.), т.е. меньше.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение $\ln(x+a) - 4(x+a)^2 + a = 0$ имеет единственный корень?

Ответ: при $a = \frac{3\ln 2+1}{2}$.

Решение. Сделаем замену $t = x + a$ и запишем уравнение в виде $\ln t = 4t^2 - a$. Построим в одной координатной системе график функции $y = \ln t$ и семейство парабол $y = 4t^2 - a$.



Эти кривые выпуклы в разную сторону, так что могут иметь общую точку только в случае касания. Обозначим через t_0 абсциссу точки касания. Тогда

$$\begin{cases} \ln t_0 &= 4t_0^2 - a_0 \\ \frac{1}{t_0} &= 8t_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_0 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \ln\frac{1}{2\sqrt{2}} &= \frac{1}{2} - a_0 \end{cases} \Rightarrow a_0 = \frac{3\ln 2+1}{2}.$$

Задача 9. В турнире по минифутболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении $1:5$ (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс пятикратную сумму, т. е. получает в шесть раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении $1:1$, на третью — $1:8$, на четвертую — $1:7$. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

Ответ: да, можно.

Решение. При победе первой команды ставку возвращают в шестикратном размере, поэтому на нее необходимо поставить более $1/6$ всех денег. Аналогично, на вторую команду необходимо поставить более $1/2$ всех денег, на третью более $1/9$, на четвертую более $1/8$. Так как сумма этих дробей меньше 1 (действ., $1/2+1/6+1/8+1/9 < 1/2+1/6+1/6+1/6 = 1$), то существует набор чисел, в сумме дающих единицу, таких, что каждое больше соответствующей дроби. Любой такой набор подходит. (Школьники могут как сослаться на существование таких чисел, так и привести конкретный пример.)

Задача 10. В конус вписан цилиндр объема 9. Плоскость верхнего основания этого цилиндра отсекает от исходного конуса усеченный конус объемом 63. Найдите объем исходного конуса.

Ответ: 64.

Решение. Пусть высота и радиус исходного конуса равны H и R, а высота и радиус цилиндра равны h и r. Воспользуемся формулой для объема усеченного конуса: $\frac{1}{3}\pi(R^2 + Rr + r^2)h = 63$. Также мы знаем, что $\pi r^2 h = 9$. Поделив соответствующие части равенств получаем $\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \left(\frac{R}{r}\right) + 1 = \frac{63\cdot 3}{9} = 21$. Решая квадратное уравнение получаем корни 4 и -5, геометрический смысл имеет только положительный. $R/r = 4$, $\frac{H-h}{H} = 4$, $\frac{h}{H} = \frac{3}{4}$, откуда получаем для исходного конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\left(\pi r^2 h\right)\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{H}{h} = \frac{1}{3}\cdot 9 \cdot 4^2 \cdot \frac{4}{3} = 64.$$

Вариант II

Задача 1. Сумма первых тринадцати членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 5 : 4. Найдите количество членов этой прогрессии.

Ответ: 22.

Решение. Обозначим через a первый член арифметической прогрессии, через d — ее разность, через n — количество членов. Тогда, сумма первых тринадцати ее членов будет равна $\frac{13\cdot(a+(a+12d))}{2}$, последних тринадцати — $\frac{13\cdot(a+(n-13)d+a+(n-1)d)}{2}$, всех без первых трех — $\frac{(n-3)\cdot(a+3d+a+(n-1)d)}{2}$, всех без последних трех — $\frac{(n-3)\cdot(a+a+(n-4)d)}{2}$. Из условия тогда имеем систему:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\cdot 13(a+6d) & = & 13(a+(n-7)d) \\ 4\cdot(n-3)\cdot(2a+(n+2)d) & = & 5\cdot(n-3)\cdot(2a+(n-4)d) \end{array}\right.,$$

или, после преобразований,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & (n-19)d \\ -2a & = & (n-28)d \end{array}\right.$$

Умножая первое равенство на 2 и прибавляя ко второму, получаем $(3n-66)d=0$. Поскольку $d\neq 0$ (так как иначе сумма всех членов без первых трех, равнялась бы сумме всех членов без последних трех), получаем $n=22$.

Задача 2. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может и говорить правду, и лгать). Жители этого острова, А и В, сказали следующее. А: «В — рыцарь.» В: «А — лжец.» Докажите, что либо один из них говорит правду, но это не рыцарь, либо один из них лжет, но это не лжец.

Решение. Переберем варианты, кем может являться житель А.

Если А рыцарь, то и В — рыцарь, но тогда А — лжец. Значит, А не может быть рыцарем. Если А — лжец, то В — не рыцарь, но сказал правду и мы нашли требуемого жителя. Наконец, если А — обычный человек, то В солгал, значит он не рыцарь, но тогда А солгал, хотя он не лжец и мы вновь нашли требуемого жителя.

Задача 3. Четырехзначное число X не кратно 10. Сумма числа X и числа, полученного из X перестановкой его второй и третьей цифр, делится на 900. Найдите остаток от деления числа X на 90.

Ответ: 45.

Решение. Пусть $X=\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$, $Y=\overline{acbd}=1000a+100c+10b+d$, при этом a, b, c, d — цифры и $a\neq 0$, $d\neq 0$.

По условию $X+Y$ делится на 900, т.е. $2000a+110(b+c)+2d \,\vdots\, 900$.

Имеем, $2d \,\vdots\, 10$, т.е. $d \,\vdots\, 5$, значит, поскольку $d\neq 0$ и d — цифра, $d=5$. Далее, $110(b+c)+10 \,\vdots\, 100$, т.е. $b+c+1 \,\vdots\, 10$, откуда, поскольку b и c — цифры, $1\leq b+c+1\leq 19$, $b+c=9$. Наконец, $2000a+110\cdot 9+10 \,\vdots\, 9$, т.е. $2a+1 \,\vdots\, 9$, откуда, поскольку a — цифра, $a=4$.

Таким образом, $X=4000+90b+90+5=90q+45$.

Задача 4. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 155 и 13 соответственно, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Ответ: 2015.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Из подобия треугольников AOB и COD следует, что $\overrightarrow{OC}=\frac{13}{155}\overrightarrow{AO}$, а $\overrightarrow{OD}=\frac{13}{155}\overrightarrow{BO}$.

Обозначим вектор $\overrightarrow{AO}$ через $\vec{a}$, а вектор $\overrightarrow{BO}$ через $\vec{b}$. Тогда, из условия следует, что $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ и

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \vec{a} + \frac{13}{155}\vec{b}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{b} + \frac{13}{155}\vec{a}.$$

Откуда

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = \left(\vec{a} + \frac{13}{155}\vec{b}, \vec{b} + \frac{13}{155}\vec{a}\right) = \frac{13}{155}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) + (\ldots) \cdot (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{13}{155}|AB|^2 = 2015,$$

где предпоследнее равенство следует из того, что треугольник AOB — прямоугольный.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 26x^2 - 42xy + 17y^2 = 10; \\ 10x^2 - 18xy + \ \ 8y^2 = 6. \end{cases}$$

Ответ: $(-1, -2)$, $(-11, -14)$, $(11, 14)$, $(1, 2)$.

Решение. Складывая и вычитая два уравнения системы, получаем, что исходная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} (6x-5y)^2 &= 16 \\ (4x-3y)^2 &= 4 \end{cases}$$

Откуда получаем 4 возможных случая

$$\begin{cases} 6x-5y &= 4 \\ 4x-3y &= 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x-5y &= 4 \\ 4x-3y &= -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x-5y &= -4 \\ 4x-3y &= 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x-5y &= -4 \\ 4x-3y &= -2 \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем, находим 4 ответа: $(-1, -2)$, $(-11, -14)$, $(11, 14)$, $(1, 2)$.

Задача 6. Для $x = \frac{\pi}{2n}$ найдите значение суммы

$$\sin^2(x) + \sin^2(2x) + \sin^2(3x) + \ldots + \sin^2(nx)$$

Ответ: $\frac{n+1}{2}$.

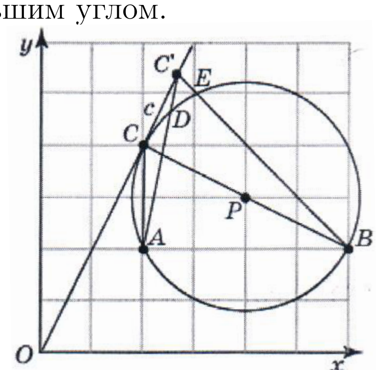
Решение. Заметим, что

$$\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \sin^2\left(\frac{(n-k)\pi}{2n}\right) = \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n}\right) = \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = 1.$$

Если n нечетно, то это позволяет все слагаемые, кроме $\sin^2(nx)$ разбить на такие пары, что сумма чисел в паре равна 1. Отсюда разбитые на пары слагаемые дают сумму $\frac{n-1}{2}$, а $\sin^2(nx) = \sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$. Если же n четно, то без пары остаются и $\sin^2(nx) = \sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$, и $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. И в том, и в другом случае полная сумма равна $\frac{n+1}{2}$.

Задача 7. Прямая c задается уравнением $y = 2x$. Точки A и B имеют координаты $A(2; 2)$ и $B(6; 2)$. На прямой c найдите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Ответ: $(2; 4)$.

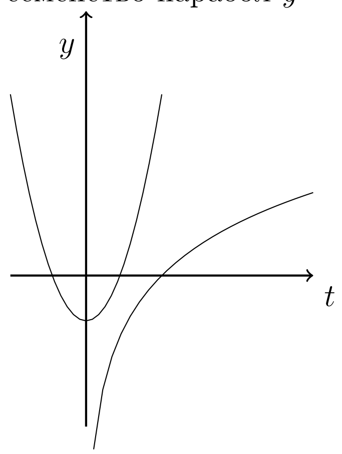


Решение. Искомой точкой является точка $C(2; 4)$. Действительно, рассмотрим окружность с центром в точке $P(4; 3)$ и радиусом $PA = PB$. Она касается прямой c в точке C. Угол ACB равен половине дуги AB. Для любой точки C' прямой c, отличной от точки C, угол $AC'B$ равен полуразности дуг AB и DE (см. рис.), т.е. меньше.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение $\ln(x-2a)-3(x-2a)^2+2a=0$ имеет единственный корень?

Ответ: при $a=\frac{\ln 6+1}{4}$.

Решение. Сделаем замену $t=x-2a$ и запишем уравнение в виде $\ln t = 3t^2-2a$. Построим в одной координатной системе график функции $y=\ln t$ и семейство парабол $y=3t^2-2a$.



Эти кривые выпуклы в разную сторону, так что могут иметь общую точку только в случае касания. Обозначим через t_0 абсциссу точки касания. Тогда

$$\left\{\begin{array}{rcl}\ln t_0 & = & 3t_0^2-2a_0\\ \frac{1}{t_0} & = & 6t_0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t_0 & = & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \ln\frac{1}{\sqrt{6}} & = & \frac{1}{2}-2a_0\end{array}\right. \Rightarrow a_0=\frac{\ln 6+1}{4}.$$

Задача 9. В турнире по минифутболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении $1:2$ (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс двукратную сумму, т. е. получает в три раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении $1:3$, на третью — $1:4$, на четвертую – $1:7$. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

Ответ: да, можно.

Решение. При победе первой команды ставку возвращают в трехкратном размере, поэтому на нее необходимо поставить более $1/3$ всех денег. Аналогично, на вторую команду необходимо поставить более $1/4$ всех денег, на третью более $1/5$, на четвертую более $1/8$. Так как сумма этих дробей меньше 1 (действ., $1/3+1/4+1/5+1/8<3/8+1/4+1/4+1/8=1$), то существует набор чисел, в сумме дающих единицу, таких, что каждое больше соответствующей дроби. Любой такой набор подходит. (Школьники могут как сослаться на существование таких чисел, так и привести конкретный пример.)

Задача 10. В конус вписан цилиндр объема 9. Плоскость верхнего основания этого цилиндра отсекает от исходного конуса усеченный конус объемом 63. Найдите объем исходного конуса.

Ответ: 64.

Решение. Пусть высота и радиус исходного конуса равны H и R, а высота и радиус цилиндра равны h и r. Воспользуемся формулой для объема усеченного конуса: $\frac{1}{3}\pi(R^2+Rr+r^2)h=63$. Также мы знаем, что $\pi r^2h=9$. Поделив соответствующие части равенств получаем $\left(\frac{R}{r}\right)^2+\left(\frac{R}{r}\right)+1=\frac{63\cdot 3}{9}=21$. Решая квадратное уравнение получаем корни 4 и -5, геометрический смысл имеет только положительный. $R/r=4$, $\frac{H-h}{H}=4$, $\frac{h}{H}=\frac{3}{4}$, откуда получаем для исходного конуса:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\left(\pi r^2h\right)\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{H}{h}=\frac{1}{3}\cdot 9\cdot 4^2\cdot\frac{4}{3}=64.$$

Вариант III

Задача 1. Сумма первых тринадцати членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 3 : 2. Найдите количество членов этой прогрессии.

Ответ: 18.

Решение. Обозначим через a первый член арифметической прогрессии, через d — ее разность, через n — количество членов. Тогда, сумма первых тринадцати ее членов будет равна $\frac{13\cdot(a+(a+12d))}{2}$, последних тринадцати — $\frac{13\cdot(a+(n-13)d+a+(n-1)d)}{2}$, всех без первых трех — $\frac{(n-3)\cdot(a+3d+a+(n-1)d)}{2}$, всех без последних трех — $\frac{(n-3)\cdot(a+a+(n-4)d)}{2}$. Из условия тогда имеем систему:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\cdot 13(a+6d) & = & 13(a+(n-7)d) \\ 2\cdot(n-3)\cdot(2a+(n+2)d) & = & 3\cdot(n-3)\cdot(2a+(n-4)d) \end{array}\right.,$$

или, после преобразований,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & (n-19)d \\ -2a & = & (n-16)d \end{array}\right.$$

Умножая первое равенство на 2 и прибавляя ко второму, получаем $(3n-54)d=0$. Поскольку $d\neq 0$ (так как иначе сумма всех членов без первых трех, равнялась бы сумме всех членов без последних трех), получаем $n=18$.

Задача 2. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет). Два жителя называются *однотипными*, если они либо оба рыцари, либо оба лжецы. A, B и C — жители этого острова. A говорит: «B и C однотипны». Что ответит C на вопрос «A и B однотипны?»

Ответ: “Да”.

Решение. Переберем варианты, кем может являться A.

Если A — рыцарь, то B и C однотипны. Если при этом B — рыцарь, то и C — рыцарь, и C ответит “Да”, если же B — лжец, то и C — лжец, а значит, все равно ответит “Да”. Если A — лжец, то B и C неоднотипны. Если при этом B — рыцарь, то C — лжец, и ответит “Да”, если же B — лжец, то C — рыцарь, то есть ответит “Да”.

Таким образом, C всегда ответит: “Да”.

Задача 3. Если из четырехзначного числа X вычесть сумму его цифр, то получится натуральное число $N=K^2$, причем K — натуральное число, дающее остаток 2 при делении на 10 и остаток 6 при делении на 11. Найдите число N.

Ответ: решений нет.

Решение. Пусть $X=\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$, при этом a, b, c, d — цифры и $a\neq 0$.

По условию, $X-a-b-c-d=999a+99b+9c=K^2$, где $K=10u+2$, $K=11v+6$.

Заметим, что $999a+99b+9c \,\vdots\, 9$, т.е. $K^2 \,\vdots\, 9$, значит $K=3M$, при этом $M^2=111a+11b+c\leq 111\cdot 9+11\cdot 9+9=1107$, $M\leq 33$, $K=3M\leq 99$.

Таким образом, нам осталось среди чисел от 1 до 99 найти все те числа, которые делятся на 3, дают остаток 2 при делении на 10 и остаток 6 при делении на 11. Это можно сделать различными способами, например, простым перебором: выпишем все числа от 1 до 99, дающие остаток 6 при делении на 11:

$$6,\ 17,\ 28,\ 39,\ 50,\ 61,\ 72,\ 83,\ 94;$$

из них только одно число — 72 дает остаток 2 при делении на 10. Но если $K=72$, то $999a+99b+9c=72^2$, откуда $111a+11b+c=576$, что невозможно ($a=5$, $11b+c=21$).

Задача 4. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 65 и 31 соответственно, а ее боковые стороны взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Ответ: -2015.

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны AD и BC. Из подобия треугольников AOB и DOC следует, что $\overrightarrow{OC} = -\frac{31}{65}\overrightarrow{BO}$, а $\overrightarrow{OD} = -\frac{31}{65}\overrightarrow{AO}$.

Обозначим вектор $\overrightarrow{AO}$ через $\vec{a}$, а вектор $\overrightarrow{BO}$ через $\vec{b}$. Тогда, из условия следует, что $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ и

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} - \frac{31}{65}\vec{b}, \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} = \vec{b} - \frac{31}{65}\vec{a}.$$

Откуда

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \left(\vec{a} - \frac{31}{65}\vec{b}, \vec{b} - \frac{31}{65}\vec{a}\right) = -\frac{31}{65}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) + (\ldots) \cdot (\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{31}{65}|AB|^2 = -2015,$$

где предпоследнее равенство следует из того, что треугольник AOB — прямоугольный.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2 + 14xy + 10y^2 = 17; \\ 4x^2 + 10xy + \ \ 6y^2 = 8. \end{cases}$$

Ответ: $(-1, 2)$, $(11, -7)$, $(-11, 7)$, $(1, -2)$.

Решение. Складывая и вычитая два уравнения системы, получаем, что исходная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} (3x + 4y)^2 & = & 25 \\ (x + 2y)^2 & = & 9 \end{cases}$$

Откуда получаем 4 возможных случая

$$\begin{cases} 3x + 4y & = & 5 \\ x + 2y & = & 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 4y & = & 5 \\ x + 2y & = & -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 4y & = & -5 \\ x + 2y & = & 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 4y & = & -5 \\ x + 2y & = & -3 \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем, находим 4 ответа: $(-1, 2)$, $(11, -7)$, $(-11, 7)$, $(1, -2)$.

Задача 6. Для $x = \frac{\pi}{2n}$ найдите значение суммы

$$\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) + \ldots + \cos^2(nx)$$

Ответ: $\frac{n-1}{2}$.

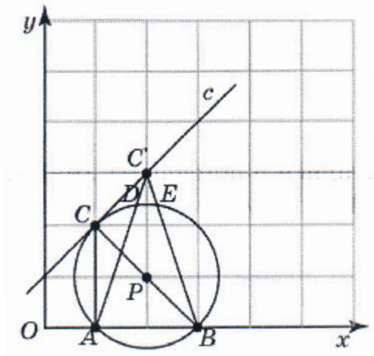
Решение. Заметим, что

$$\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \cos^2\left(\frac{(n-k)\pi}{2n}\right) = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n}\right) = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = 1.$$

Если n нечетно, то это позволяет все слагаемые, кроме $\cos^2(nx)$ разбить на такие пары, что сумма чисел в паре равна 1. Отсюда разбитые на пары слагаемые дают сумму $\frac{n-1}{2}$, а $\cos^2(nx) = \cos^2(\frac{\pi}{2}) = 0$. Если же n четно, то без пары остаются и $\cos^2(nx) = \cos^2(\frac{\pi}{2}) = 0$, и $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. И в том, и в другом случае полная сумма равна $\frac{n-1}{2}$.

Задача 7. Прямая c задается уравнением $y = x+1$. Точки A и B имеют координаты $A(1; 0)$ и $B(3; 0)$. На прямой c найдите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Ответ: $(1; 2)$.

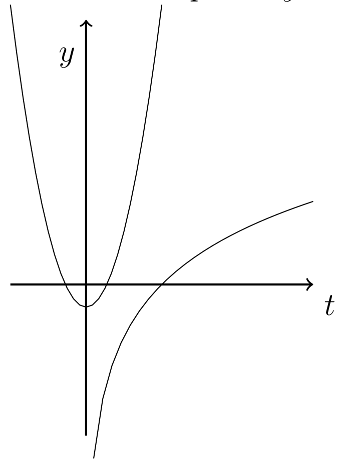


Решение. Искомой точкой является точка $C(1;2)$. Действительно, рассмотрим окружность с центром в точке $P(2;1)$ и радиусом $PA = PB$. Она касается прямой c в точке C. Угол ACB равен половине дуги AB. Для любой точки C' прямой c, отличной от точки C, угол $AC'B$ равен полуразности дуг AB и DE (см. рис.), т.е. меньше.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение $\ln(x+a) - 4(x+a)^2 + a = 0$ имеет единственный корень?

Ответ: при $a = \frac{3\ln 2+1}{2}$.

Решение. Сделаем замену $t = x + a$ и запишем уравнение в виде $\ln t = 4t^2 - a$. Построим в одной координатной системе график функции $y = \ln t$ и семейство парабол $y = 4t^2 - a$.



Эти кривые выпуклы в разную сторону, так что могут иметь общую точку только в случае касания. Обозначим через t_0 абсциссу точки касания. Тогда

$$\left\{\begin{array}{rcl} \ln t_0 & = & 4t_0^2 - a_0 \\ \frac{1}{t_0} & = & 8t_0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t_0 & = & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \ln\frac{1}{2\sqrt{2}} & = & \frac{1}{2} - a_0 \end{array}\right. \Rightarrow a_0 = \frac{3\ln 2+1}{2}.$$

Задача 9. В турнире по волейболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 5 (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс пятикратную сумму, т. е. получает в шесть раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 1, на третью — 1 : 5, на четвертую — 1 : 6. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

Ответ: да, можно.

Решение. При победе первой команды ставку возвращают в шестикратном размере, поэтому на нее необходимо поставить более 1/6 всех денег. Аналогично, на вторую команду необходимо поставить более 1/2 всех денег, на третью более 1/6, на четвертую более 1/7. Так как сумма этих дробей меньше 1 (действ., $1/2 + 1/6 + 1/6 + 1/7 < 1/2 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1$), то существует набор чисел, в сумме дающих единицу, таких, что каждое больше соответствующей дроби. Любой такой набор подходит. (Школьники могут как сослаться на существование таких чисел, так и привести конкретный пример.)

Задача 10. В конус вписан цилиндр объема 21. Плоскость верхнего основания этого цилиндра отсекает от исходного конуса усеченный конус объемом 91. Найдите объем исходного конуса.

Ответ: 94,5.

Решение. Пусть высота и радиус исходного конуса равны H и R, а высота и радиус цилиндра равны h и r. Воспользуемся формулой для объема усеченного конуса: $\frac{1}{3}\pi(R^2 + Rr + r^2)h = 91$. Также мы знаем, что $\pi r^2 h = 21$. Поделив соответствующие части равенств получаем $\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \left(\frac{R}{r}\right) + 1 = \frac{91\cdot 3}{21} = 13$. Решая квадратное уравнение получаем корни 3 и -4, геометрический смысл имеет только положительный. $R/r = 3$, $\frac{H-h}{H} = 3$, $\frac{h}{H} = \frac{2}{3}$, откуда получаем для исходного конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\left(\pi r^2 h\right)\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{H}{h} = \frac{1}{3}\cdot 21\cdot 3^2\cdot \frac{3}{2} = 94,5.$$

Вариант IV

Задача 1. Сумма первых тринадцати членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 6 : 5. Найдите количество членов этой прогрессии.

Ответ: 24.

Решение. Обозначим через a первый член арифметической прогрессии, через d — ее разность, через n — количество членов. Тогда, сумма первых тринадцати ее членов будет равна $\frac{13\cdot(a+(a+12d))}{2}$, последних тринадцати — $\frac{13\cdot(a+(n-13)d+a+(n-1)d)}{2}$, всех без первых трех — $\frac{(n-3)\cdot(a+3d+a+(n-1)d)}{2}$, всех без последних трех — $\frac{(n-3)\cdot(a+a+(n-4)d)}{2}$. Из условия тогда имеем систему:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\cdot 13(a+6d) & = & 13(a+(n-7)d) \\ 5\cdot(n-3)\cdot(2a+(n+2)d) & = & 6\cdot(n-3)\cdot(2a+(n-4)d) \end{array}\right.,$$

или, после преобразований,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & (n-19)d \\ -2a & = & (n-34)d \end{array}\right.$$

Умножая первое равенство на 2 и прибавляя ко второму, получаем $(3n-72)d=0$. Поскольку $d\neq 0$ (так как иначе сумма всех членов без первых трех, равнялась бы сумме всех членов без последних трех), получаем $n=24$.

Задача 2. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может и говорить правду, и лгать). Жители этого острова A и B сказали следующее. A: «B — рыцарь». B: «A — не рыцарь». Докажите, что по крайней мере один из них говорит правду, но это не рыцарь.

Решение. Переберем варианты, каким могут быть представленные два высказывания.

Если оба ложные, то, в частности, лжет B, но тогда A — рыцарь, а рыцарь не может лгать. Значит, либо A, либо B говорит правду. Если правду говорит A, тогда B — рыцарь, а значит A — обычный человек, а не рыцарь, и он — искомый житель. Если правду сказал B, то A не рыцарь. Значит, если B — рыцарь, то A сказал правду, хотя он не рыцарь, и мы нашли требуемого жителя, если же B — не рыцарь, то он — искомый.

Задача 3. Если из четырехзначного числа X вычесть сумму его цифр, то получится натуральное число $N=K^2$, причем K — натуральное число, дающее остаток 5 при делении на 20 и остаток 3 при делении на 21. Найдите число N.

Ответ: 2025.

Решение. Пусть $X=\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$, при этом a, b, c, d — цифры и $a\neq 0$.

По условию, $X-a-b-c-d=999a+99b+9c=K^2$, где $K=20u+5$, $K=21v+3$.

Заметим, что $999a+99b+9c\,\vdots\,9$, т.е. $K^2\,\vdots\,9$, значит $K=3M$, при этом $M^2=111a+11b+c\leq 111\cdot 9+11\cdot 9+9=1107$, $M\leq 33$, $K=3M\leq 99$.

Таким образом, нам осталось среди чисел от 1 до 99 найти все те числа, которые делятся на 3, дают остаток 5 при делении на 20 и остаток 3 при делении на 21. Это можно сделать различными способами, например, простым перебором: выпишем все числа от 1 до 99, дающие остаток 3 при делении на 21:

$$3,\ 24,\ 45,\ 66,\ 87;$$

из них только одно число — 45 дает остаток 5 при делении на 20. То есть $K=45$, а $N=2025$.

Задача 4. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 155 и 13 соответственно, а ее боковые стороны взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Ответ: -2015.

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны AD и BC. Из подобия треугольников AOB и DOC следует, что $\overrightarrow{OC} = -\frac{13}{155}\overrightarrow{BO}$, а $\overrightarrow{OD} = -\frac{13}{155}\overrightarrow{AO}$.

Обозначим вектор $\overrightarrow{AO}$ через $\vec{a}$, а вектор $\overrightarrow{BO}$ через $\vec{b}$. Тогда, из условия следует, что $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ и

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} - \frac{13}{155}\vec{b}, \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} = \vec{b} - \frac{13}{155}\vec{a}.$$

Откуда

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \left(\vec{a} - \frac{13}{155}\vec{b}, \vec{b} - \frac{13}{155}\vec{a}\right) = -\frac{13}{155}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) + (\ldots) \cdot (\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{13}{155}|AB|^2 = -2015,$$

где предпоследнее равенство следует из того, что треугольник AOB — прямоугольный.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2 - 14xy + 10y^2 = 17; \\ 4x^2 - 10xy + \ \ 6y^2 = 8. \end{cases}$$

Ответ: $(-1, -2)$, $(11, 7)$, $(-11, -7)$, $(1, 2)$.

Решение. Складывая и вычитая два уравнения системы, получаем, что исходная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} (3x - 4y)^2 & = & 25 \\ (x - 2y)^2 & = & 9 \end{cases}$$

Откуда получаем 4 возможных случая

$$\begin{cases} 3x - 4y & = & 5 \\ x - 2y & = & 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 4y & = & 5 \\ x - 2y & = & -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 4y & = & -5 \\ x - 2y & = & 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 4y & = & -5 \\ x - 2y & = & -3 \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем, находим 4 ответа: $(-1, -2)$, $(11, 7)$, $(-11, -7)$, $(1, 2)$.

Задача 6. Для $x = \frac{\pi}{2n}$ найдите значение суммы

$$\sin^2(x) + \sin^2(2x) + \sin^2(3x) + \ldots + \sin^2(nx)$$

Ответ: $\frac{n+1}{2}$.

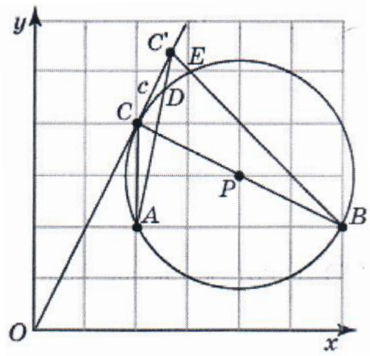
Решение. Заметим, что

$$\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \sin^2\left(\frac{(n-k)\pi}{2n}\right) = \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n}\right) = \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = 1.$$

Если n нечетно, то это позволяет все слагаемые, кроме $\sin^2(nx)$ разбить на такие пары, что сумма чисел в паре равна 1. Отсюда разбитые на пары слагаемые дают сумму $\frac{n-1}{2}$, а $\sin^2(nx) = \sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$. Если же n четно, то без пары остаются и $\sin^2(nx) = \sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$, и $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. И в том, и в другом случае полная сумма равна $\frac{n+1}{2}$.

Задача 7. Прямая c задается уравнением $y = 2x$. Точки A и B имеют координаты $A(2; 2)$ и $B(6; 2)$. На прямой c найдите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Ответ: $(2; 4)$.

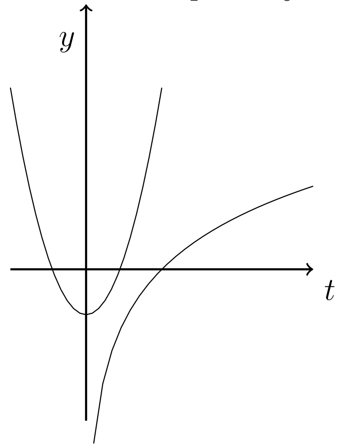


Решение. Искомой точкой является точка $C(2;4)$. Действительно, рассмотрим окружность с центром в точке $P(4;3)$ и радиусом $PA = PB$. Она касается прямой c в точке C. Угол ACB равен половине дуги AB. Для любой точки C' прямой c, отличной от точки C, угол $AC'B$ равен полуразности дуг AB и DE (см. рис.), т.е. меньше.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение $\ln(x-2a)-3(x-2a)^2+2a=0$ имеет единственный корень?

Ответ: при $a = \frac{\ln 6+1}{4}$.

Решение. Сделаем замену $t = x - 2a$ и запишем уравнение в виде $\ln t = 3t^2-2a$. Построим в одной координатной системе график функции $y = \ln t$ и семейство парабол $y = 3t^2 - 2a$.



Эти кривые выпуклы в разную сторону, так что могут иметь общую точку только в случае касания. Обозначим через t_0 абсциссу точки касания. Тогда

$$\begin{cases} \ln t_0 = 3t_0^2 - 2a_0 \\ \frac{1}{t_0} = 6t_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \ln\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2} - 2a_0 \end{cases} \Rightarrow a_0 = \frac{\ln 6 + 1}{4}.$$

Задача 9 (IV). В турнире по волейболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении $1:2$ (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс двукратную сумму, т. е. получает в три раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении $1:4$, на третью — $1:5$, на четвертую — $1:6$. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

Ответ: да, можно.

Решение. При победе первой команды ставку возвращают в трехкратном размере, поэтому на нее необходимо поставить более $1/3$ всех денег. Аналогично, на вторую команду необходимо поставить более $1/5$ всех денег, на третью более $1/6$, на четвертую более $1/6$. Так как сумма этих дробей меньше 1 (действ., $1/3+1/5+1/6+1/7 < 1/3+1/3+1/6+1/6 = 1$), то существует набор чисел, в сумме дающих единицу, таких, что каждое больше соответствующей дроби. Любой такой набор подходит. (Школьники могут как сослаться на существование таких чисел, так и привести конкретный пример.)

Задача 10. В конус вписан цилиндр объема 21. Плоскость верхнего основания этого цилиндра отсекает от исходного конуса усеченный конус объемом 91. Найдите объем исходного конуса.

Ответ: 94,5.

Решение. Пусть высота и радиус исходного конуса равны H и R, а высота и радиус цилиндра равны h и r. Воспользуемся формулой для объема усеченного конуса: $\frac{1}{3}\pi(R^2+Rr+r^2)h = 91$. Также мы знаем, что $\pi r^2 h = 21$. Поделив соответствующие части равенств получаем $\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \left(\frac{R}{r}\right) + 1 =$

$\frac{91 \cdot 3}{21} = 13$. Решая квадратное уравнение получаем корни 3 и -4, геометрический смысл имеет только положительный. $R/r = 3$, $\frac{H-h}{H} = 3$, $\frac{h}{H} = \frac{2}{3}$, откуда получаем для исходного конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\left(\pi r^2 h\right)\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{H}{h} = \frac{1}{3} \cdot 21 \cdot 3^2 \cdot \frac{3}{2} = 94,5.$$